



# Fluides autour d'obstacles minces

Christophe Lacave

## ► To cite this version:

Christophe Lacave. Fluides autour d'obstacles minces. Mathématiques [math]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2008. Français. NNT: . tel-00345665

**HAL Id: tel-00345665**

**<https://theses.hal.science/tel-00345665>**

Submitted on 9 Dec 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° : 289 – 2008

UNIVERSITÉ DE LYON 1

THÈSE DE DOCTORAT

(Arrêté du 7 août 2006)

Spécialité Mathématiques

Présentée par **Christophe Lacave**

**Fluides autour d'obstacles  
minces**

Soutenue le 8 **décembre** 2008

**Jury :**

Didier Bresch

Jean-Yves Chemin

Thierry Gallay (rapporteur)

Dragos Iftimie (directeur)

Carlo Marchioro (rapporteur)

Andro Mikelic

Geneviève Raugel



*à ma famille*



## *Remerciements*

Je tiens tout d'abord à remercier mes rapporteurs, Thierry Gallay et Carlo Marchioro d'avoir accepté de rapporter sur ma thèse, ainsi qu'à Didier Bresch, Jean-Yves Chemin, Andro Mikelic et Geneviève Raugel de faire partie de mon jury.

Bien entendu, ma reconnaissance va particulièrement à mon directeur de thèse, Dragos Iftimie, qui a su me lancer dans un domaine passionnant. Il n'a jamais ménagé son temps ni ses efforts pour m'aider. Son enseignement, son enthousiasme et sa confiance m'ont vraiment permis de m'épanouir scientifiquement pendant ces années.

Un grand merci aussi à tous les mathématiciens avec qui j'ai eu des discussions intéressantes dans ces trois dernières années. Je pense tout particulièrement à Lorenzo Brandolese, Isabelle Gallagher, Grégoire Loeper, Milton Lopes Filho, Helena Nussenzveig Lopes et Sylvie Monniaux en ce qui concerne la mécanique des fluides et à Etienne Ghys, Stéphane Lamy et Jean-Claude Sikorav pour l'analyse complexe. Merci beaucoup à Alexei Glutsyuk avec qui j'ai travaillé sur le théorème d'Ahlfors-Bers et à Xavier Buff qui m'a suggéré une autre méthode (voir page 35). Un grand merci aussi à mes amis Evelyne Miot et Benoît Pausader qui travaillent aussi sur les EDPs.

Je remercie aussi les membres du laboratoire de mathématiques de lyon1 pour leur accueil, ainsi que les chercheurs que j'ai rencontré en colloque.

Je remercie du fond du coeur mes parents et toute ma famille qui m'ont largement soutenu tout au long des diverses épreuves.

Merci particulièrement à Cédric et Viorica pour leur aide concernant la rédaction d'article, ainsi qu'à Arnaud, Evelyne et Marlène concernant la rédaction de l'introduction de ma thèse. Je remercie chaleureusement mon père pour tout le temps qu'il a passé à corriger l'orthographe de ce mémoire (je compatis pour les littéraires qui s'immiscent dans le milieu scientifique). Merci beaucoup pour votre disponibilité.

Je remercie aussi les personnes qui m'ont accompagné tout le long de cette thèse : Arnaud, Benjamin, Caroline, Rémi et Thierry.

Enfin, merci aussi à tous les autres, Ameline, Anabelle, Arnaud (L.), Benoît, Byron, Camille, Carole, Céline, Chafia, Damien, Eric, Estelle, Francine, Franck, Gregory, Hinano, Juliette, Karine, Landry, Laurent, Marie, Mathilde, Matthieu, Office, Vincent, Thierry (D.) et Yannou.

J'espère n'avoir oublié personne, si c'est le cas je m'en excuse par avance.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>9</b>
1.1	Une limite singulière . . . . .	12
1.2	Unicité pour le système Euler point vortex . . . . .	21
1.3	Liste des notations . . . . .	25
<b>2</b>	<b>Fluide à l'extérieur d'obstacles fins</b>	<b>27</b>
2.1	Analyse complexe . . . . .	28
2.1.1	Biholomorphisme de l'extérieur de la courbe . . . . .	28
2.1.2	L'aplatissement de l'obstacle . . . . .	37
2.2	Fluide dans les domaines extérieurs . . . . .	39
2.2.1	Le noyau de la loi de Biot-Savart . . . . .	39
2.2.2	Champ harmonique . . . . .	40
2.2.3	La loi de Biot-Savart . . . . .	41
2.2.4	Fonctions de troncature . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Euler en dimension deux</b>	<b>45</b>
3.1	Introduction . . . . .	46
3.2	Estimations <i>a priori</i> . . . . .	47
3.2.1	Estimation de la vitesse . . . . .	48
3.2.2	Estimation temporelle . . . . .	53
3.3	Passage à la limite . . . . .	54
3.3.1	Compacité forte de la vitesse . . . . .	54
3.3.2	Calcul du rotationnel et de la divergence de la vitesse . . . . .	63
3.3.3	Equation du tourbillon limite sur le plan . . . . .	66
3.3.4	Equation de la vitesse limite sur le plan . . . . .	68
3.3.5	Formulation sur l'extérieur de la courbe . . . . .	69
3.4	Fluide constant à l'infini . . . . .	70
<b>4</b>	<b>Navier-Stokes en dimension deux</b>	<b>75</b>
4.1	Introduction . . . . .	76
4.2	Limite de la donnée initiale . . . . .	77



4.3	Estimation de la vitesse . . . . .	79
4.4	Passage à la limite . . . . .	83
4.5	Unicité du problème limite . . . . .	87
<b>5</b>	<b>Navier-Stokes en dimension trois</b>	<b>91</b>
5.1	Introduction . . . . .	92
5.2	Extérieur de la surface . . . . .	94
5.2.1	Convergence de la donnée initiale . . . . .	94
5.2.2	Convergence des solutions . . . . .	96
5.3	Remarque sur le cas de l'extérieur de la courbe . . . . .	99
5.4	Un calcul explicite . . . . .	100
<b>6</b>	<b>Unicité pour le système mixte Euler point vortex</b>	<b>103</b>
6.1	Introduction . . . . .	104
6.2	Lagrangien implique eulerien . . . . .	106
6.3	Unicité de la solution eulerienne . . . . .	109
6.3.1	Solutions renormalisées . . . . .	110
6.3.2	Conservation du tourbillon près du point vortex . . . . .	113
6.3.3	Formulation faible pour la vitesse . . . . .	116
6.3.4	Preuve du théorème 6.1.4 . . . . .	118
6.4	Remarques finales . . . . .	125

# Chapitre 1

## Introduction

### Résumé

Nous étudions dans cette thèse le comportement asymptotique des fluides incompressibles dans les domaines extérieurs, quand l'obstacle devient de plus en plus fin, tendant vers une courbe. Nous étendons les travaux d'Iftimie, Lopes Filho, Nussenzweig Lopes et Kelliher dans lesquels les auteurs considèrent des obstacles se contractant vers un point. Nous travaillons tout d'abord en dimension deux. En utilisant des outils de l'analyse complexe, nous traitons le cas des fluides idéaux et visqueux à l'extérieur d'une courbe. Nous regardons ensuite en dimension trois les fluides visqueux à l'extérieur d'une surface. Nous finissons enfin par montrer l'unicité du problème mixte Euler point vortex avec un seul point vortex introduit par Marchioro et Pulvirenti, dans le cas où le tourbillon initial est constant près du point vortex.

Nous formulons précisément dans ce chapitre les problèmes étudiés et nous donnons les résultats principaux. Nous exposons aussi un bref résumé des travaux [12, 13, 11] et nous expliquons les raisons d'une approche différente entre les petits obstacles et les obstacles fins.

Dans un souci de clarté, nous donnons à la fin de ce chapitre une liste des notations utilisées dans cette thèse.

Cette thèse regroupe quatre articles : [17] accepté dans les annales de l'institut Henri Poincaré, Analyse non linéaire ; [18, 19] soumis ; puis un dernier concernant la dimension trois qui est en cours de rédaction.

Considérons un fluide occupant un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$ . Une description macroscopique classique de l'état du fluide peut être donnée par la densité  $\rho$ , la vitesse  $u = (u_1, u_2, u_3)$  et la pression  $p$ . Le mouvement d'un fluide visqueux incompressible est régi par l'équation de Navier-Stokes

$$\partial_t u - \nu \Delta u + u \cdot \nabla u = -\nabla p + g,$$

avec  $g$  la force extérieure exercée sur le fluide et  $\nu$  la viscosité du fluide. L'obtention de cette équation est largement détaillée dans la littérature (voir par exemple [24]). Dans toute cette thèse, nous ne considérons pas de force extérieure (c'est à dire  $g = 0$ ). Pour la majorité des fluides, il est raisonnable de supposer l'incompressibilité du fluide, ce qui donne comme condition :

$$\operatorname{div} u = 0.$$

Pour les équations de Navier-Stokes, les conditions au bord les plus fréquentes sont celles de l'adhérence à la paroi (ou conditions de Dirichlet homogènes) :

$$u = 0 \quad \text{au bord.}$$

Dans le cas d'un domaine non borné, nous supposons dans ce travail que la vitesse est nulle à l'infini.

Si la résistance au fluide n'est pas négligeable, parfois  $\nu$  devient très petit après changement d'échelle. Il a été par exemple calculé pour un poisson bougeant dans l'eau que  $\nu \approx 10^{-7}$ . Il est donc parfois raisonnable de choisir la viscosité nulle, et nous obtenons alors les équations d'Euler qui régissent le mouvement d'un fluide dit parfait incompressible :

$$\partial_t u + u \cdot \nabla u = -\nabla p.$$

Dans ce cas, la condition d'adhérence à la paroi doit être remplacée par la condition de glissement au bord :

$$u \cdot n = 0 \quad \text{au bord,}$$

où  $n$  désigne la normale au bord.

Les équations de Navier-Stokes et d'Euler peuvent être considérées pour toutes les dimensions en espace mais elles n'ont un sens physique qu'en dimension trois. Nous pouvons cependant observer qu'une solution  $u = (u_1, u_2)$  de ces équations en dimension deux nous donne une solution en dimension trois de la forme

$$u = u(x_1, x_2, x_3, t) = (u_1(x_1, x_2, t), u_2(x_1, x_2, t), 0).$$

Nous pouvons par exemple penser à un cylindre infini, ou à un fluide à l'extérieur d'une aile infinie. Nous traitons donc le cas de la dimension deux et trois (la dimension un n'étant pas intéressante à cause de la condition d'incompressibilité).

De plus, une donnée initiale doit être précisée pour que le problème soit bien-posé.

Définissons enfin la quantité clé dans l'étude de ces équations. Nous désignons par  $\omega$  le tourbillon qui est le rotationnel du champ de vitesse défini de la manière suivante :

$$\omega = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1$$

si la dimension d'espace vaut 2 et

$$\omega = (\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2, \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3, \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1)$$

si la dimension d'espace vaut 3.

La plus grande partie de ce travail concerne un certain type de limite singulière pour ces équations. Plus précisément, nous considérons les équations de Navier-Stokes et d'Euler posées à l'extérieur d'une suite d'obstacles de plus en plus fins, qui se rétrécissent vers une courbe (en dimension deux d'espace) ou vers une surface (en dimension trois d'espace). L'objectif est de déterminer l'équation limite.

Nous trouvons ainsi, par passage à la limite, une solution à ces équations. Une question naturelle est l'unicité d'une telle solution. Dans le cas des équations de Navier-Stokes en dimension deux, cette question sera traitée à la suite de l'obtention de l'équation. Pour les équations d'Euler en dimension deux, l'équation obtenue par l'aplatissement des obstacles vers une courbe est bien trop compliquée. Par contre, dans le cas où l'obstacle se contracte vers un point  $P$ , le problème limite correspond à l'équation d'Euler avec un tourbillon composé d'une partie régulière et d'une masse de Dirac (fixe) concentrée en  $P$ . L'étude de l'unicité d'un tel problème nous conduit à travailler sur un problème plus général qui fut introduit par Marchioro et Pulvirenti. Nous étudions alors dans la deuxième partie de ce travail l'unicité de la solution dans le système Euler point vortex, système pouvant être vu comme l'équation d'Euler avec un tourbillon composé d'une partie régulière et d'une somme finie de masses de Dirac (mobiles).

Nous détaillons dans la suite le contenu de ces résultats.

## 1.1 Une limite singulière

Nous nous donnons une famille d'obstacles  $\Omega_\varepsilon$ , réguliers, bornés, ouverts, connexes et simplement connexes qui se contractent quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  vers une courbe si la dimension d'espace vaut deux ou une surface si la dimension d'espace vaut trois. Nous considérons les équations de Navier-Stokes ou d'Euler dans le domaine extérieur  $\Pi_\varepsilon \equiv \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}$ . Nous supposons enfin que le tourbillon initial  $\omega_0$  est régulier et que son support est un compact qui n'intersecte pas les obstacles. Comme l'objectif est de comparer des fluides définis sur des domaines différents, nous étendons les fonctions sur tout l'espace comme suit : pour une fonction  $f$  définie sur  $\Pi_\varepsilon$  nous notons par  $Ef$  le prolongement de  $f$  sur  $\mathbb{R}^n$ , tel qu'il vaut  $f$  sur  $\Pi_\varepsilon$  et zéro ailleurs.

Nous constatons que le comportement de ces limites singulières est différent suivant la dimension d'espace et l'équation considérée. Nous étudions trois cas : l'équation d'Euler en dimension deux et l'équation de Navier-Stokes en dimensions deux et trois.

Ce type de limite singulière dans ces mêmes trois situations a été étudié dans [12, 13, 14, 11] dans le cas où les obstacles convergent vers un point au lieu d'une courbe ou une surface. Nous expliquerons les différences notables entre nos résultats et ceux sus-cités.

### Fluide idéal en dimension 2

En dimension deux, le tourbillon ne suffit pas à déterminer de manière unique un champ de vitesse à divergence nulle, tangent au bord  $\Gamma_\varepsilon \equiv \partial\Omega_\varepsilon$  et de limite nulle à l'infini. Nous avons besoin en plus de la circulation de la vitesse autour de l'obstacle. Nous fixons alors la circulation de la vitesse initiale :

$$\gamma = \oint_{\Gamma_\varepsilon} u_0^\varepsilon \cdot ds$$

indépendamment de  $\varepsilon$ . Nous rappelons alors dans la partie 2.2 que pour une géométrie du domaine extérieur donnée, la vitesse initiale est bien uniquement déterminée par  $\omega_0$  et  $\gamma$ . Nous donnons de plus dans cette partie la forme explicite de la loi de Biot-Savart : loi donnant la vitesse en fonction du tourbillon et de la circulation au bord de l'obstacle. Nous utilisons les outils de l'analyse complexe (ici le théorème de Riemann) pour construire un biholomorphisme  $T_\varepsilon$  entre  $\Pi_\varepsilon$  et l'extérieur du disque unité, ce qui nous permet alors de trouver la forme explicite (2.2.7) :

$$u_0^\varepsilon = u_0^\varepsilon(x, t) = K^\varepsilon[\omega_0(\cdot, t)](x) + \alpha H^\varepsilon(x)$$

avec  $K^\varepsilon$ ,  $H^\varepsilon$  et  $\alpha$  donnés dans (2.2.2), (2.2.5) et (2.2.8) en fonction de  $\omega_0$ ,  $\gamma$  et  $T_\varepsilon$ . Le fait de travailler en dimension deux d'espace constitue un avantage car nous disposons de formules explicites dues à l'identification de  $\mathbb{R}^2$  au plan complexe  $\mathbb{C}$  et à la théorie de l'analyse complexe.

Le comportement d'un fluide idéal incompressible dans  $\Pi_\varepsilon$  est déterminé par les équations d'Euler :

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon = -\nabla p^\varepsilon & \text{dans } \Pi_\varepsilon \times (0, \infty) \\ \operatorname{div} u^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Pi_\varepsilon \times (0, \infty) \\ u^\varepsilon \cdot \hat{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_\varepsilon \times (0, \infty) \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |u^\varepsilon| = 0 & \text{pour } t \in [0, \infty) \\ u^\varepsilon(x, 0) = u_0^\varepsilon(x) & \text{dans } \Pi_\varepsilon \end{cases}$$

où  $p^\varepsilon = p^\varepsilon(x, t)$  est la pression. D'après les travaux de Kikuchi [15], le système précédent admet une unique solution globale  $u^\varepsilon$ . Une caractéristique de cette solution est la conservation de la circulation de la vitesse sur le bord, ainsi que de  $m \equiv \int \operatorname{rot} u^\varepsilon = \int \omega_0$ . Ceci implique en particulier que dans la loi de Biot-Savart,  $\alpha$  est une constante (voir (2.2.8)) et vaut  $\gamma + m$ . Pour étudier les fluides parfaits en dimension deux, nous travaillons avec l'équation du tourbillon  $\omega^\varepsilon \equiv \operatorname{rot} u^\varepsilon$  qui est équivalente à la précédente :

$$\begin{cases} \partial_t \omega^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla \omega^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Pi_\varepsilon \times (0, \infty) \\ u^\varepsilon = K^\varepsilon[\omega^\varepsilon] + \alpha H^\varepsilon & \text{dans } \Pi_\varepsilon \times (0, \infty) \\ \omega^\varepsilon(x, 0) = \omega_0(x) & \text{dans } \Pi_\varepsilon \end{cases}$$

avec  $K^\varepsilon$  et  $H^\varepsilon$  définis dans (2.2.2) et (2.2.5). L'intérêt de cette formulation est d'avoir une équation de transport. Ceci nous permet alors de conclure que les normes  $L^p(\Pi_\varepsilon)$  du tourbillon sont des quantités conservées, pour  $p \in [1, \infty]$ , ce qui donne directement une estimation et une convergence faible des tourbillons dans les espaces  $L^p$ .

L'objectif est de déterminer la limite de  $(u^\varepsilon, \omega^\varepsilon)$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Ce genre d'étude a été fait par Iftimie, Lopes Filho et Nussenzveig Lopes dans [12] dans le cas où l'obstacle se contracte homothétiquement vers un point. Ces auteurs posent  $\Omega_\varepsilon \equiv \varepsilon \Omega$ , avec  $\Omega$  un obstacle fixe (régulier, borné, connexe, simplement connexe, contenant 0) et montrent le résultat suivant :

**Théorème 1.1.1.** *Il existe une sous-suite  $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$  telle que*

- (a)  $\Phi^\varepsilon u^\varepsilon \rightarrow u$  fortement dans  $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$  ;
- (b)  $\Phi^\varepsilon \omega^\varepsilon \rightarrow \omega$  faible \* dans  $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^4_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2))$  ;

(c) le couple limite  $(u, \omega)$  vérifie au sens faible l'équation suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \\ \operatorname{rot} u = \omega + \gamma \delta_0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \\ \omega(x, 0) = \omega_0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

avec  $\delta_0$  la fonction Dirac en 0.

Dans ce résultat,  $\Phi^\varepsilon$  désigne une fonction de troncature d'un  $\varepsilon$ -voisinage de  $\Omega_\varepsilon$ . Les limites (a) et (b) sont indépendantes du choix de la fonction de troncature, et nous pouvons énoncer le même résultat avec  $Eu^\varepsilon$  et  $E\omega^\varepsilon$  à la place (l'indépendance du choix de la fonction de troncature sera justifiée dans le cas où les obstacles se contractent vers une courbe à la page 50). Nous obtenons donc à la limite les équations d'Euler dans tout le plan, auxquelles s'ajoute une masse de Dirac centrée à l'origine. Cette apparition est la réminiscence de la circulation  $\gamma$  non nulle des vitesses initiales autour de l'obstacle, et nous remarquons que ce terme disparaît si  $\gamma = 0$ .

Le travail effectué dans [17], correspondant aux chapitres 2 et 3, décrit le cas où l'obstacle s'aplatit vers une courbe  $\Gamma$  régulière. Avant de donner le résultat principal, il faut préciser le sens de cette limite. En effet, l'objectif dans les deux travaux [12, 17] est d'obtenir des estimations sur la vitesse grâce à la loi de Biot-Savart, afin de passer ensuite à la limite. Pour cela, il nous faut l'expression de  $T_\varepsilon$ , le biholomorphisme entre  $\Pi_\varepsilon$  et l'extérieur du disque unité. Dans [12], en choisissant une convergence homothétique des obstacles, les auteurs n'ont plus qu'à choisir  $T_\varepsilon(x) = T(x/\varepsilon)$ , avec  $T$  le biholomorphisme entre  $\Omega$  et l'extérieur du disque unité. Ceci simplifie grandement les estimations a priori. Dans notre cas, nous devons d'abord réfléchir à l'existence d'une application conforme  $T$  entre l'extérieur de la courbe  $\Pi \equiv \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  et l'extérieur du disque unité. En utilisant quelques résultats importants de l'analyse complexe (voir [31, 32]), nous établissons cette existence dans la première partie du chapitre 2, puis nous définissons dans la seconde partie le rétrécissement de l'obstacle  $\Omega_\varepsilon$  vers  $\Gamma$  par une convergence des  $T_\varepsilon$  vers  $T$ . Cette limite est détaillée dans l'hypothèse 2.1.6. Il m'est actuellement impossible de démontrer que cette hypothèse est vérifiée pour une convergence géométrique des obstacles vers la courbe (par exemple pour la distance de Hausdorff). Nous donnons juste un exemple de famille d'obstacles où l'hypothèse s'avère exacte. La démonstration de cette hypothèse pourrait être le sujet d'un travail ultérieur. La convergence des  $T_\varepsilon$  vers  $T$ , dans le sens de l'hypothèse 2.1.6, est la clé de la détermination de la vitesse limite.

Dans [12], les auteurs ne disposent pas de cette convergence, mais les estimations de la vitesse sont plus aisées. En effet, ils séparent la vitesse

$u^\varepsilon$  en deux composantes :  $v^\varepsilon$  bornée indépendamment de  $\varepsilon$  et une partie harmonique  $\gamma H^\varepsilon$ . De plus, quand les obstacles se contractent vers un point, les fonctions troncatures vérifient :

$$mes(\text{supp } \nabla \Phi^\varepsilon) = O(\varepsilon^2) \text{ et } \|\nabla \Phi^\varepsilon\|_{L^p} \rightarrow 0, \forall 1 \leq p < 2.$$

Ils trouvent alors une limite faible du rotationnel et de la divergence :

$$\begin{aligned} \text{div}(\Phi^\varepsilon v^\varepsilon) &= 0 + \nabla \Phi^\varepsilon \cdot v^\varepsilon \rightarrow 0 \\ \text{rot}(\Phi^\varepsilon v^\varepsilon) &= \Phi^\varepsilon \omega_\varepsilon + \nabla^\perp \Phi^\varepsilon \cdot v^\varepsilon \rightarrow \omega, \end{aligned}$$

ce qui leur permet d'extraire une limite forte  $L^2$  de la suite  $\{\Phi^\varepsilon v^\varepsilon\}$  grâce au théorème div-rot.

Dans notre cas, nous n'obtenons plus d'estimations  $L^\infty$ , mais seulement  $L^p$  pour  $p < 4$ , car  $DT$  explose comme l'inverse de la racine carrée de la distance au voisinage des extrémités de la courbe. De plus  $mes(\text{supp } \nabla \Phi^\varepsilon) = O(\varepsilon)$  et nous voyons qu'il est impossible d'appliquer un argument similaire à [12]. En remarquant cependant que  $\nabla \Phi^\varepsilon$  est normal au bord, et que  $u^\varepsilon$  est tangent, une première étape consiste à démontrer que la limite  $\nabla \Phi^\varepsilon \cdot u^\varepsilon \rightarrow 0$  est encore vérifiée dans notre cas. Ensuite, le but est d'utiliser la convergence faible des tourbillons, puis celle de  $T_\varepsilon$  vers  $T$  pour passer directement à la limite dans la loi de Biot-Savart, grâce au théorème de convergence dominée. Ceci nous donnera une convergence forte  $L^2$  de la vitesse. Par un couplage convergence forte-faible de vitesse-tourbillon, nous pouvons alors passer à la limite dans les équations d'Euler. L'originalité ici est l'obtention d'une forme explicite de la vitesse limite. Nous utilisons cette dernière pour déduire des propriétés telles que le comportement du fluide près de la courbe, de la relation entre la vitesse limite et le tourbillon limite, etc. Le résultat pour les équations d'Euler et pour le cas de la courbe en dimension deux est le suivant :

**Théorème 1.1.2.** *Il existe une sous-suite  $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$  telle que*

- (a)  $\Phi^\varepsilon u^\varepsilon \rightarrow u$  fortement dans  $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$  ;
- (b)  $\Phi^\varepsilon \omega^\varepsilon \rightarrow \omega$  faible \* dans  $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^4_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2))$  ;
- (c)  $u$  s'exprime explicitement en fonction de  $\omega$  (voir (3.3.2)) ;
- (d)  $u$  et  $\omega$  sont des solutions faibles de  $\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0$  sur  $\mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$ .

La vitesse limite  $u$  est explicitement donnée en fonction de  $\omega$  et  $\gamma$  (voir le théorème 3.3.6) et elle correspond à un champ de vecteurs à divergence nulle, tangent à la courbe  $\Gamma$ , de limite nulle à l'infini, dont le rotationnel vaut  $\omega$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  et dont la circulation autour de  $\Gamma$  vaut  $\gamma$ . Nous remarquons aussi que cette vitesse est continue jusqu'à la courbe (mais avec des valeurs



différentes de chaque côté de la courbe), sauf aux extrémités où elle explose comme l'inverse de la racine carrée de la distance. La vitesse reste néanmoins bornée dans les  $L^p$  pour  $p < 4$ . Si nous calculons dans le plan en entier, nous obtenons en fait que  $\text{rot } u = \omega + g_\omega(s)\delta_\Gamma$  où  $\delta_\Gamma$  est la fonction Dirac sur la courbe  $\Gamma$ , et où la densité  $g_\omega$ , définie dans le lemme 3.3.8, dépend de  $\omega$  et de la circulation  $\gamma$ . La fonction  $g_\omega$  est continue sur  $\Gamma$  et explose aux extrémités de la courbe. Nous remarquons de plus que  $g_\omega$  correspond au saut à travers la courbe de la partie tangentielle de la vitesse. La présence du terme additionnel  $g_\omega$  dans l'expression du rotationnel de la vitesse, par rapport à l'équation d'Euler dans le plan entier, est en fait nécessaire pour obtenir un champ de vecteurs tangent à la courbe, de circulation  $\gamma$  autour de la courbe.

Si nous supposons que  $\gamma = 0$ , nous voyons un contraste entre [12] et le cas traité ici. Dans le cas d'un petit obstacle, nous ne voyons plus de trace de l'obstacle, alors que dans le cas de l'obstacle fin,  $g_\omega \neq 0$ . De plus, dans le cas de l'obstacle fin, cette densité dépend du temps. Autrement dit, si le fluide n'est pas dévié par un point, il le sera toujours par une courbe.

Nous trouvons aussi une formulation sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  correspondant à l'équation d'Euler à l'extérieur d'une courbe. L'une des conséquences de ce travail est donc l'existence d'une solution faible globale aux équations d'Euler dans un tel domaine.

Dans le cas des équations d'Euler en dimension deux autour d'un petit obstacle, nous signalons que Lopes Filho a traité dans [23] le cas où nous avons plusieurs obstacles, et dont un obstacle tend vers un point. Cependant, l'auteur a dû travailler dans un domaine borné. Dans ce cas, nous n'avons plus de forme explicite pour la loi de Biot-Savart et les techniques d'analyse complexe sont remplacées par des méthodes variationnelles et le principe du maximum. Le résultat est équivalent à celui du théorème 1.1.1.

En revenant au cas d'un domaine non borné, considérons brièvement le cas d'un obstacle formé de deux disques, un centré en  $(-2, 0)$  et l'autre en  $(2, 0)$ , que nous faisons tendre vers des points. Si nous recherchons comme dans [12, 17] un biholomorphisme entre l'extérieur des petits disques, et l'extérieur de deux disques unités fixes, nous nous rendons compte de l'impossibilité de la construction d'une telle application. En effet une application conforme n'envoie une couronne sur une autre couronne que si les couronnes ont le même rapport entre le grand et le petit rayon.

Nous pouvons aussi réfléchir à l'unicité de la solution des problèmes limites. L'existence d'une solution est donc assurée par passage à la limite

sur les solutions dans des domaines réguliers. A chaque énoncé de théorème, nous précisons que cela est à une sous-suite près. Si nous montrons l'unicité, cela signifierait que  $\Phi^\varepsilon u^\varepsilon \rightarrow u$  pour toute suite  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ . L'unicité est trop compliquée dans le cas de la courbe, à cause de la dépendance du temps et de  $\omega$  dans l'expression de la densité  $g_\omega$ . En revanche, dans le cas où l'obstacle se contracte vers un point, nous obtenons dans la deuxième partie de ce manuscrit (chapitre 6) l'unicité de la solution des équations (c) du théorème 1.1.1.

Il est légitime de s'interroger sur l'intérêt de l'hypothèse  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |u| = 0$ . Que deviennent les résultats si la vitesse n'est plus nulle à l'infini ? Cette question est récurrente en aéronautique, car à la suite d'un changement de référentiel, nous pouvons supposer que le corps est fixe, et que c'est le fluide (air ou eau) qui est en mouvement à l'infini. Si nous présageons que les résultats sont inchangés, il faut prendre garde car la loi de Biot-Savart est modifiée, et il faut vérifier au cas par cas. Nous discutons ce cas dans la dernière partie du chapitre 3 pour conclure que dans le cas de la courbe, le résultat reste similaire pour un fluide idéal en dimension deux.

## Fluide visqueux en dimension 2

Comme nous l'avons expliqué au début de la partie précédente, nous fixons en plus du tourbillon initial  $\omega_0$  la circulation  $\gamma$  de la vitesse initiale autour de l'obstacle. Ces deux quantités choisies indépendantes de  $\varepsilon$  suffisent alors pour déterminer un champ de vitesse  $u_0^\varepsilon$ , à divergence nulle, tangent au bord et de limite nulle à l'infini.

Le comportement d'un fluide visqueux incompressible à l'extérieur de  $\Pi_\varepsilon$  est donné par les équations de Navier-Stokes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u^\varepsilon - \nu \Delta u^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon = -\nabla p^\varepsilon & \text{dans } \Pi_\varepsilon \times (0, \infty) \\ \operatorname{div} u^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Pi_\varepsilon \times (0, \infty) \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_\varepsilon \times (0, \infty) \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |u^\varepsilon| = 0 & \text{pour } t \in [0, \infty) \\ u^\varepsilon(x, 0) = u_0^\varepsilon(x) & \text{dans } \Pi_\varepsilon \end{array} \right.$$

où  $p^\varepsilon = p^\varepsilon(x, t)$  est la pression. L'existence et l'unicité globales d'une solution à un tel problème sont données par les travaux de Kozono et Yamazaki [16]. Remarquons que cette fois ci, l'équation avec le tourbillon ne nous apporte plus de contrôle. En effet, il s'ajoute un terme dissipatif à l'équation de transport, ce qui dans le plan entier nous permet de conclure à la décroissance des

normes  $L^p$  du tourbillon. Mais nous ne pouvons plus rien dire dès que nous travaillons avec un domaine à bord (ce qui est le cas ici) car le tourbillon ne vérifie pas des conditions au bord satisfaisantes. En fait, l'estimation d'une dérivée de la vitesse s'obtient directement de l'équation de Navier-Stokes, grâce au terme du second ordre  $-\nu\Delta u^\varepsilon$ .

Iftimie, Lopes Filho et Nussenzweig Lopes [13] ont considéré le cas où l'obstacle se contracte homothétiquement vers un point. Ils obtiennent qu'à la limite, la vitesse vérifie l'équation de Navier-Stokes dans tout le plan, où la masse de Dirac apparaît uniquement dans la donnée initiale. Ceci provient de la circulation  $\gamma$  des vitesses initiales autour des obstacles, alors que cette circulation est nulle pour les temps strictement positifs (d'après l'hypothèse d'adhérence au bord). Ils utilisent à nouveau le changement de variable  $y = x/\varepsilon$  pour travailler sur un domaine fixe.

Ici, nous supposons comme dans le chapitre 3 que la famille d'obstacles converge vers une courbe. Comme dans le cas de la convergence des obstacles vers un point, une première étape est de déterminer la limite de la vitesse initiale. Nous utilisons pour cela la loi de Biot-Savart, et nous trouvons une limite équivalente à celle obtenue dans le cas d'un fluide idéal. Les estimations a priori sont simplifiées par rapport à [13], car cette limite de la vitesse initiale  $u_0$  appartient à  $L^p_{\text{loc}}$  pour  $p < 4$ , alors que dans le cas des petits obstacles, la vitesse limite n'est pas  $L^2_{\text{loc}}$ . Ainsi les auteurs doivent d'abord travailler sur un petit intervalle de temps afin que la vitesse devienne  $L^2_{\text{loc}}$  et ils utilisent alors les estimations classiques pour les équations de Navier-Stokes. En revanche, dans les deux cas  $u_0$  n'est pas de carré intégrable à l'infini. Il faut alors estimer la partie de carré intégrable du champ de vitesse. Cette partie, notée  $W^\varepsilon$ , correspond à  $u^\varepsilon$  auquel nous avons ôté la partie harmonique (multipliée par une fonction de troncature adéquate). Pour une telle donnée initiale, nous définissons donc une solution des équations de Navier-Stokes à l'extérieur d'une courbe comme un champ de vitesse qui vérifie les équations dans le sens des distributions, et tel que la différence entre la vitesse et un champ de vecteurs régulier fixe  $v^\varepsilon$  (se comportant comme  $\gamma \frac{x^\perp}{2\pi|x|^2}$  à l'infini) possède la régularité des solutions de Leray (ceci est décrit précisément dans la définition 4.4.4). L'objectif du chapitre 4 est de prouver le théorème suivant.

**Théorème 1.1.3.** *Soient  $\omega_0$  et  $\gamma$  indépendants de  $\varepsilon$  comme définis précédemment. Soit  $u^\varepsilon$  la solution des équations de Navier-Stokes sur  $\Pi_\varepsilon \equiv \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\varepsilon$  avec pour vitesse initiale  $u_0^\varepsilon$ , alors  $\{Eu^\varepsilon\}$  converge dans  $L^2_{\text{loc}}([0, \infty) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma))$  vers une solution des équations de Navier-Stokes dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  (dans le sens donné par la définition 4.4.4) avec un tourbillon initial  $\omega_0 + g_\omega \delta_\Gamma$  et une vitesse initiale donnée par la relation (4.1.4). De plus une telle solution (sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ ) est unique.*

Nous rappelons que  $Eu^\varepsilon$  désigne l'extension de  $u^\varepsilon$  sur  $\mathbb{R}^2$ , valant 0 sur  $\Omega_\varepsilon$ .

L'existence de solutions des équations de Navier-Stokes dans des domaines quelconques (en dimension deux ou trois) a été étudiée dans [1] pour des données initiales de carré intégrable, et en dimension trois dans [30] pour des données initiales  $H^{\frac{1}{2}}$ . Kozono et Yamazaki [16] ont traité le cas des données dans  $L^{2,\infty}$ , en dimension deux, mais pour des domaines extérieurs dont les bords sont réguliers. Le théorème énoncé ci-dessus établit l'existence et l'unicité d'une solution des équations de Navier-Stokes à l'extérieur d'une courbe, dans un cas non traité dans les travaux cités. En effet, le résultat de [1] ne peut pas être appliqué car notre donnée initiale n'est pas de carré intégrable à l'infini. De plus, si  $u_0$  vérifie la condition d'existence pour le résultat de Kozono et Yamazaki [16] (voir (4.1.3)), leur résultat est inutilisable ici car notre domaine  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  n'est pas régulier.

Au contraire des travaux [12, 13, 17], nous ne trouvons hélas pas de formulation sur le plan entier. En choisissant ici de regarder une formulation sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ , nous étudions les convergences sur les compacts  $K$  de cet ensemble. Comme il existe  $\varepsilon_K$  tel que  $K \cap \Omega_\varepsilon = \emptyset$  pour tout  $\varepsilon \leq \varepsilon_K$ ,  $\nabla \Phi^\varepsilon$  qui correspond aux effets des bords ne pose plus de problème dans les estimations. La difficulté dans l'étude des équations de Navier-Stokes autour d'une courbe réside dans la présence d'un opérateur du deuxième ordre  $\Delta$  et le fait que la mesure de Lebesgue de l'ensemble où  $\Phi^\varepsilon$  n'est pas constant est de l'ordre  $\varepsilon$ . Dans le cas où l'obstacle converge vers un point, cette mesure est de l'ordre  $\varepsilon^2$ , et donc  $\|\Delta \Phi^\varepsilon\|_{L^1}$  est d'ordre 1, alors que dans notre cas, cette norme est d'ordre  $1/\varepsilon$ . Dans le cas du fluide parfait autour de la courbe,  $\|\nabla \Phi^\varepsilon\|_{L^1}$  est aussi d'ordre 1. Cette explosion dans le cas du fluide visqueux autour de la courbe est une réelle difficulté mathématique. Par contre, elle est physiquement intéressante. En effet, le résultat attendu par des ingénieurs de l'INSA Toulouse serait que la vitesse limite vérifierait l'équation suivante :

$$\partial_t u - \nu \Delta u + u \cdot \nabla u = \nu f m_G - \nabla p^\varepsilon \text{ dans } \mathbb{R}^2 \times (0, \infty),$$

où  $m_G$  est une mesure concentrée sur la courbe  $\Gamma$  (peut être le Dirac ?) et où  $f$  correspond à la force de portance que le fluide visqueux exerce sur la courbe. Cette perspective est prometteuse pour des futurs travaux.

Citons enfin le travail effectué dans [14], où les auteurs font tendre la viscosité  $\nu$  vers zéro, ainsi que l'obstacle vers un point.

## Fluide visqueux en dimension 3

A la différence de la dimension deux, la donnée du tourbillon  $\omega_0$  suffit pour déterminer de manière unique un champ de vecteurs à divergence nulle,

tangent au bord de l'obstacle et de limite nulle à l'infini. Le cas des équations d'Euler semble pour l'instant hors d'atteinte car nous ne pouvons pas obtenir des estimations indépendantes de  $\varepsilon$  sur le gradient de la vitesse. En effet, en dimension trois, l'équation vérifiée par le tourbillon ne correspond pas à une équation de transport et nous ne pouvons plus dire que les normes  $L^p$  du tourbillon sont conservées. A contrario, l'équation de Navier-Stokes permet d'obtenir ce contrôle grâce au terme d'ordre deux  $\nu\Delta u$ . Kelliher et Iftimie ont regardé dans [11] le cas où l'obstacle se contracte vers un point, et ils ont démontré que nous retrouvons à la limite une vitesse satisfaisant l'équation de Navier-Stokes dans tout l'espace. La limite de la vitesse initiale est alors  $u_0 = -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{x-y}{4\pi|x-y|^3} \times \omega_0(y) dy$ , et nous n'observons plus de trace de l'obstacle, même sur la donnée initiale.

Nous nous donnons  $S$ , une surface régulière bornée de l'espace, à bord  $\Gamma$  et nous supposons que  $\Pi_\varepsilon \equiv \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\varepsilon$  est un domaine extérieur simplement connexe avec un bord  $C^\infty$  tel que  $\Omega_\varepsilon$  converge vers  $S$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  dans le sens suivant : il existe  $M > 0$  tel que  $\Omega_\varepsilon \subset S + B(0, M\varepsilon)$  pour tout  $\varepsilon > 0$ . Nous n'utilisons donc pas ici des propriétés aussi fortes que l'hypothèse de convergence 2.1.6 dans le cas de la dimension deux. Heureusement car nous n'avons plus d'outil puissant équivalent à l'analyse complexe. Nous n'avons donc plus de forme explicite pour la loi de Biot-Savart. Cette forme explicite était nécessaire dans le cas d'Euler, car nous déduisions la convergence de la vitesse grâce à la convergence faible des tourbillons. Dans le chapitre 4, l'hypothèse 2.1.6 servait à déterminer précisément la donnée initiale et à estimer la partie harmonique à l'infini  $v^\varepsilon$ , afin de travailler avec des champs  $W^\varepsilon = u^\varepsilon - v^\varepsilon$  de carré intégrable. Ce dernier problème n'existe plus en dimension trois,  $\Pi_\varepsilon$  étant simplement connexe, nous n'avons plus de circulation et de partie harmonique. A contrario, nous avons des difficultés à trouver des propriétés sur la donnée initiale limite, telles que l'explosion de la vitesse près du bord. Nous montrons la convergence forte vers un champ de vecteurs qui vérifie l'équation de Navier-Stokes à l'extérieur de la surface, avec une donnée initiale à divergence nulle et tangente au bord. Mise à part la perte de la forme explicite de la donnée initiale, nous retrouvons donc un résultat équivalent à la courbe en dimension deux. Pour les mêmes raisons, nous n'essaierons pas de chercher une formulation sur l'espace en entier.

Dans le cas où l'obstacle se contracte vers une courbe, nous prouvons la convergence forte dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$  de la donnée initiale vers la donnée initiale sans obstacle  $u_0$ . Actuellement, nous ne sommes pas en mesure de montrer que la vitesse limite est une solution faible des équations de Navier-Stokes posées dans tout l'espace  $\mathbb{R}^3$ . La raison de ce blocage mathématique sera expliquée dans la partie 5.3.

Nous concluons le chapitre 5 par un calcul explicite dans le cas où l'obs-

tacle se contracte vers le plan  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ . C'est le seul cas où nous pouvons obtenir une limite explicite de la donnée initiale (qui est différente de la vitesse sans obstacle  $u_0$ ).

## 1.2 Unicité pour le système Euler point vortex

Nous nous plaçons à nouveau dans le cadre d'un fluide idéal incompressible en dimension deux. Le comportement d'un tel fluide dans  $\mathbb{R}^2$  est décrit par un champ de vitesse à divergence nulle  $v = (v_1, v_2) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  et son tourbillon  $\omega = \operatorname{rot} v = \partial_2 v_1 - \partial_1 v_2 : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , vérifiant les équations d'Euler en formulation tourbillon

$$\begin{cases} \partial_t \omega + v \cdot \nabla \omega = 0, \\ \omega = \operatorname{rot} v, \operatorname{div} v = 0, \end{cases} \quad (1.2.1)$$

où  $\operatorname{div} v = \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2$ . Pour ce système, le théorème de Yudovich établit l'existence et l'unicité globales dans  $L^\infty(\mathbb{R}, L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2))$ , pour un tourbillon initial  $\omega_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ . L'équation (1.2.1) est une équation de transport pour un champ  $v$ , et nous pouvons donc la résoudre avec la méthode des caractéristiques. Quand  $v$  est régulière, nous pouvons définir des trajectoires définies par

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \phi_t(x) = v(t, \phi_t(x)) \\ \phi_0(x) = x \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (1.2.2)$$

En considérant (1.2.1), nous avons alors

$$\frac{d}{dt} \omega(t, \phi_t(x)) \equiv 0, \quad (1.2.3)$$

ce qui signifie que  $\omega$  est constant le long des caractéristiques. Dans le cas général d'un tourbillon  $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}, L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2))$ , ces calculs peuvent être rigoureusement justifiés, et nous avons donc l'équivalence entre la formulation eulerienne (1.2.1) et lagrangienne (1.2.2), (1.2.3).

Puisque l'équation (1.2.1) régit l'évolution du tourbillon  $\omega$ , il est naturel d'exprimer la vitesse  $v$  en fonction de  $\omega$ . La loi de Biot-Savart dans le plan entier correspond à

$$v = K * \omega, \quad (1.2.4)$$

avec  $*$  représentant le produit par convolution avec  $K : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  le noyau défini par

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{x^\perp}{|x|^2}, \quad x \neq 0. \quad (1.2.5)$$

Lorsque le tourbillon se concentre vers des points, nous pouvons modifier l'équation (1.2.1), en accord avec les formules (1.2.4) et (1.2.5), en un système d'équations différentielles ordinaires, appelé système de points vortex, qui décrit le mouvement de ces points. Une justification rigoureuse de l'établissement de ce système est exposée dans [29]. Si le tourbillon initial  $\omega_0$  est proche de plusieurs masses de Dirac  $\sum d_i \delta_{z_i}$  dans un certain sens, les auteurs prouvent que  $\omega(t)$  reste proche de  $\sum d_i \delta_{z_i(t)}$  pour tout temps, où les points vortex  $z_i(t)$  vérifient le système de points vortex.

Dans les années 90, Marchioro et Pulvirenti [27, 28] ont travaillé sur le problème mixte, problème où le tourbillon est composé d'une partie  $L^\infty$  et d'une somme de masses de Dirac. Ils obtiennent le système mixte Euler points vortex, regroupant le système points vortex et la formulation lagrangienne classique pour un fluide en dimension deux. Dans le cas d'un seul point vortex (cas étudié dans cette thèse), les auteurs définissent le système mixte Euler point vortex pour la formulation lagrangienne.

**Définition 1.2.1** (Solutions lagrangiennes). *Soient  $\omega_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$  et  $z_0 \in \mathbb{R}^2$ . Le triplet  $(\omega, z, \phi)$  est une solution lagrangienne globale du système mixte Euler point vortex, avec une donnée initiale  $(\omega_0, z_0)$ , si  $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}, L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2))$ ,  $v = K * \omega \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2)$ ,*

$$z : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

*sont tels que  $z \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2)$ ,  $\phi(\cdot, x) \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2)$  pour tout  $x \neq z_0$  et s'il satisfait*

$$\begin{cases} v(\cdot, t) = (K * \omega)(\cdot, t), \\ \dot{z}(t) = v(t, z(t)), \\ z(0) = z_0, \\ \dot{\phi}_t(x) = v(t, \phi_t(x)) + K(\phi_t(x) - z(t)), \\ \phi_0(x) = x, \quad x \neq z_0, \\ \omega(\phi_t(x), t) = \omega_0(x), \end{cases} \quad (\text{FL})$$

*où  $\phi_t = \phi(t, \cdot)$ . De plus, pour tout  $t$ ,  $\phi_t$  est un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{z_0\}$  dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \{z(t)\}$  préservant la mesure de Lebesgue.*

Ce système génère deux sortes de trajectoires. Le point vortex  $z(t)$  se déplace sous l'influence du champ de vitesse  $v$  produit par la partie régulière  $\omega$  du tourbillon. Cette partie régulière et le point vortex créent des trajectoires régulières  $\phi$ , le long desquelles  $\omega$  reste constant. La principale différence avec la dynamique classique d'Euler est la présence du champ  $K(x - z(t))$ , singulier au point vortex, mais régulier ailleurs. Marchioro et Pulvirenti [27]

démontrent l'existence globale de (FL). La preuve consiste principalement à estimer la distance entre  $\phi_t(x)$  et  $z(t)$ , en utilisant la régularité quasi-Lipschitz de  $v = K * \omega$  et la forme explicite de  $K$ . Ils montrent en particulier qu'une caractéristique partant d'un point différent du point vortex ne peut pas rencontrer  $z(t)$  en temps fini. Par conséquent, le terme singulier  $K(\phi_t(x) - z(t))$  dans (FL) reste bien défini pour tout temps.

La notion de solution lagrangienne est forte. Nous pouvons définir une solution dans un sens plus faible : dans le sens des distributions pour l'EDP (sans faire apparaître les trajectoires  $\phi$ ). Nous l'appelons solution eulerienne, définie comme suit.

**Définition 1.2.2** (Solutions euleriennes). *Soient  $\omega_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$  et  $z_0 \in \mathbb{R}^2$ . Le couple  $(\omega, z)$  est une solution eulerienne globale du système mixte Euler point vortex, avec une donnée initiale  $(\omega_0, z_0)$ , si*

$$\omega \in L^\infty(\mathbb{R}, L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)), \quad z \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2)$$

et si nous avons dans le sens des distributions

$$\begin{cases} \partial_t \omega + \operatorname{div}((v + H)\omega) = 0, \\ \omega(0) = \omega_0, \\ \dot{z}(t) = v(t, z(t)), \quad z(0) = z_0, \end{cases} \quad (\text{FE})$$

avec  $v$  et  $H$  donnés par

$$v(t, \cdot) = K *_x \omega(t), \quad H(t, \cdot) = K(\cdot - z(t)).$$

Autrement dit, pour toute fonction test  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2)$ , nous avons

$$-\int_{\mathbb{R}^2} \omega_0(x) \varphi(0, x) dx = \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^2} \omega(\partial_t \varphi + (v + H) \cdot \nabla \varphi) ds dx,$$

et pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$

$$z(t) = z_0 + \int_0^t v(s, z(s)) ds.$$

Une telle solution eulerienne apparaît par exemple dans [12]. Dans ce papier, le point vortex fixe est obtenu comme limite des équations d'Euler à l'extérieur d'un obstacle qui se contracte vers un point. La régularité de la solution limite obtenue dans [12] n'est pas aussi forte que celle donnée dans la définition 1.2.2.

Nous regardons donc l'unicité des solutions lagrangienne et eulerienne ainsi que l'équivalence des définitions 1.2.1 et 1.2.2.

Nous commençons par remarquer qu'une solution lagrangienne est une solution eulerienne.



**Théorème 1.2.3.** *Soient  $\omega_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$  et  $z_0 \in \mathbb{R}^2$ . Soit  $(\omega, z, \phi)$  une solution lagrangienne globale du système mixte Euler point vortex, avec pour donnée initiale  $(\omega_0, z_0)$ , alors  $(\omega, z)$  est une solution eulerienne globale.*

L'objectif de ce chapitre est d'étudier l'unicité des solutions lagrangienne ou eulerienne.

L'unicité de la solution lagrangienne peut être facilement établie quand le support de  $\omega_0$  ne contient pas  $z_0$ . Dans ce cas, le support de  $\omega(t)$  ne rencontre jamais  $z(t)$  et le champ  $x \mapsto K(\phi_t(x) - z(t))$  est Lipschitz sur  $\text{supp } \omega_0$ .

Une autre situation étudiée est le cas où le tourbillon est initialement constant près du point vortex. Par quelques pistes, Marchioro et Pulvirenti suggèrent dans [27] que l'unicité de la solution lagrangienne devrait être vraie dans cette situation. En supposant en plus que  $\omega_0$  est lipschitz, Starovoitov [33] démontre l'unicité de la solution lagrangienne. Nous traitons ici le cas général, où le tourbillon initial, appartenant à  $L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ , est constant près du point vortex  $z_0$ . Plus précisément, nous démontrons le résultat suivant.

**Théorème 1.2.4.** *Soient  $\omega_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$  et  $z_0 \in \mathbb{R}^2$  tels qu'il existe  $R_0 > 0$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$  tels que*

$$\omega_0 \equiv \alpha \text{ sur } B(z_0, R_0).$$

*Supposons de plus que  $\omega_0$  est à support compact. Il existe alors une unique solution eulerienne du système mixte Euler point vortex vérifiant cette donnée initiale.*

Afin de prouver ce théorème, nous montrons tout d'abord que si  $(\omega, z)$  est une solution eulerienne, alors  $\omega$  est une solution renormalisée de l'équation de transport, au sens de DiPerna-Lions [4]. Grâce à ce résultat, nous remarquons que le tourbillon reste constant près du point vortex. Nous profitons alors de la formulation faible (FE) pour obtenir une équation aux dérivées partielles satisfaite par la vitesse  $v = K * \omega$ . En plus de comparer les deux parties régulières, il faut pour comparer deux solutions, contrôler les trajectoires des points vortex. Pour deux solutions euleriennes données  $(\omega_1, z_1)$  et  $(\omega_2, z_2)$ , nous introduisons donc la quantité

$$r(t) = |\tilde{z}(t)|^2 + \|\tilde{v}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)},$$

où  $\tilde{z} = z_1 - z_2$ ,  $\tilde{\omega} = \omega_1 - \omega_2$  et  $\tilde{v} = v_1 - v_2 = K * \tilde{\omega}$ . Sachant que  $\tilde{\omega}$  s'annule sur un voisinage du point vortex, la vitesse  $\tilde{v}$  est harmonique sur ce voisinage. Ceci procure en particulier un contrôle des normes  $L^\infty$  (ainsi que des normes  $L^\infty$  du gradient) de la vitesse par ces normes  $L^2$ . Par une estimation du type Gronwall, nous concluons alors que  $r \equiv 0$ .

En utilisant alors ce théorème, le théorème 1.2.3 ainsi que l'existence d'une solution lagrangienne globale établie par Marchioro et Pulvirenti dans [27], nous observons qu'une solution eulerienne est aussi une solution lagrangienne. Les définitions 1.2.1 et 1.2.2 sont donc équivalentes si le tourbillon initial appartient à  $L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ , à support compact et constant près de  $z_0$ .

## 1.3 Liste des notations

### Domaines

$D \equiv B(0, 1)$  le disque unité.

$S \equiv \partial D$ .

$\Gamma$  est un arc de Jordan (voir la proposition 2.1.2 pour les hypothèses).

$\Pi \equiv \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ .

$\Omega_\varepsilon$  est un ensemble ouvert, borné, connexe et simplement connexe, tel que  $\Omega_\varepsilon \rightarrow \Gamma$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  (voir la partie 2.1.2).

$\Gamma_\varepsilon \equiv \partial\Omega_\varepsilon$  est une courbe de Jordan  $C^\infty$ .

$\Pi_\varepsilon \equiv \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}$ .

### Fonctions

$x^* = \frac{x}{|x|^2}$ .

$\omega_0$  est le tourbillon initial ( $C_c^\infty(\Pi)$ ).

$\gamma$  est la circulation de  $u_0^\varepsilon$  le long de  $\Gamma_\varepsilon$  (voir l'introduction).

$(u^\varepsilon, \omega^\varepsilon)$  est la solution des équations d'Euler/Navier Stokes (en fonction du chapitre) sur  $\Pi_\varepsilon$ .

$T$  est le biholomorphisme entre  $\Pi$  et  $\text{int } D^c$  (voir la proposition 2.1.2).

$T_\varepsilon$  est le biholomorphisme entre  $\Pi_\varepsilon$  et  $\text{int } D^c$  (voir l'hypothèse 2.1.6).

$K^\varepsilon$  et  $H^\varepsilon$  sont donnés dans (2.2.2) et (2.2.5).

$K$  et  $H$  correspondent à  $K^\varepsilon$  et  $H^\varepsilon$ , en remplaçant  $T_\varepsilon$  par  $T$  (voir (4.2.1) et (4.2.2)).

$K^\varepsilon[\omega^\varepsilon](x) \equiv \int_{\Pi_\varepsilon} K^\varepsilon(x, y)\omega^\varepsilon(y)dy$ .

$\Phi^\varepsilon$  et  $\Phi^{\varepsilon, \lambda}$  sont des fonctions troncatures d'un voisinage de  $\Omega_\varepsilon$  (voir la sous-partie 2.2.4).

Si  $f$  est une fonction définie sur  $\Pi_\varepsilon$ , alors  $Ef$  correspond à l'extension de  $f$  à tout l'espace : il vaut  $f$  sur  $\Pi_\varepsilon$  et zéro sur l'obstacle.



# Chapitre 2

## Fluide en dimension 2 autour d'obstacles fins

### Résumé

Dans tous les problèmes, nous nous donnons un tourbillon initial :

$$\omega = \operatorname{rot} u.$$

Il est donc intéressant d'obtenir la forme explicite de la vitesse en fonction de  $\omega$ . Cette formule, appelée loi de Biot-Savart, est bien connue dans le cas de l'espace entier. Dans les domaines extérieurs en dimension deux, nous trouvons aussi une forme explicite en fonction du biholomorphisme qui envoie le domaine extérieur sur l'extérieur du disque unité. Nous associons ici  $\mathbb{R}^2$  à  $\mathbb{C}$ , ce qui nous permet d'utiliser les outils puissants de l'analyse complexe, comme le Théorème de Riemann. Nous étudions tout d'abord le comportement asymptotique de ce biholomorphisme quand l'obstacle s'aplatit vers une courbe, puis nous établissons dans la seconde partie la loi de Biot-Savart.

Inclus dans l'article *Two Dimensional Incompressible Ideal Flow Around a Thin Obstacle Tending to a Curve* qui va paraître dans les Annales de l'Institut Henri Poincaré (Analyse non linéaire), 2008.

## 2.1 Analyse complexe

Soit  $D = B(0, 1)$  la boule unité et  $S = \partial D$  le cercle unité. Dans toute ce chapitre, nous identifierons  $\mathbb{R}^2$  au plan complexe  $\mathbb{C}$ .

### 2.1.1 Biholomorphisme de l'extérieur de la courbe

Nous commençons cette partie par rappeler quelques définitions classiques concernant les courbes.

**Définition 2.1.1.** *Nous appelons arc de Jordan une courbe  $C$  donnée par la représentation paramétrique  $\varphi(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$  avec  $\varphi$  une fonction injective, continue sur  $[0, 1]$ . Un arc de Jordan ouvert possède une paramétrisation  $\varphi(t)$ ,  $0 < t < 1$  avec  $\varphi$  continue et injective sur  $(0, 1)$ .*

*Nous appelons une courbe de Jordan une courbe  $C$  donnée par la représentation paramétrique  $\psi(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , 1-périodique, avec  $\psi$  une fonction injective sur  $[0, 1)$ , continue sur  $\mathbb{R}$ .*

Une courbe de Jordan est donc fermée ( $\psi(0) = \psi(1)$ ) alors qu'un arc de Jordan a des extrémités distinctes. Si  $J$  est une courbe de Jordan dans  $\mathbb{C}$ , alors le théorème de la courbe de Jordan dit que  $\mathbb{C} \setminus J$  possède exactement deux composantes connexes  $G_0$  et  $G_1$ , satisfaisant  $\partial G_0 = \partial G_1 = J$ .

L'arc (ou la courbe) de Jordan est de classe  $C^{n,\alpha}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ ) si sa paramétrisation  $\varphi$  est  $n$  fois continûment dérivable, satisfaisant  $\varphi'(t) \neq 0$  pour tout  $t$ , et si  $|\varphi^{(n)}(t_1) - \varphi^{(n)}(t_2)| \leq C|t_1 - t_2|^\alpha$  pour tout  $t_1$  et  $t_2$ .

Soit  $\Gamma : \Gamma(t), 0 \leq t \leq 1$  un arc de Jordan. Alors l'ensemble  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  est connexe, et nous le noterons  $\Pi$ . L'objectif de cette partie est d'obtenir quelques propriétés d'un biholomorphisme  $T : \Pi \rightarrow \text{int } D^c$ . Après avoir appliqué une homothétie, rotation et translation, nous pouvons supposer que les extrémités de l'arc sont  $-1 = \Gamma(0)$  et  $1 = \Gamma(1)$ .<sup>1</sup>

**Proposition 2.1.2.** *Si  $\Gamma$  est un arc de Jordan  $C^2$ , tel que l'intersection avec le segment  $[-1, 1]$  est un nombre fini de segments et de points, alors il existe un biholomorphisme  $T : \Pi \rightarrow \text{int } D^c$  qui vérifie les propriétés suivantes :*

- $T^{-1}$  et  $DT^{-1}$  sont continus jusqu'au bord, et  $T^{-1}$  envoie  $S$  sur  $\Gamma$ ,
- $DT^{-1}$  est borné,
- $T$  et  $DT$  sont continus jusqu'à  $\Gamma$ , avec différentes valeurs de chaque côté de  $\Gamma$ , excepté aux extrémités de la courbe où  $T$  se comporte comme la racine carrée de la distance et  $DT$  se comporte comme l'inverse de la racine carrée de la distance,

---

<sup>1</sup>A l'exception de cette partie et malgré la définition précédente, nous dirons par abus de langage que  $\Gamma$  est une courbe du plan, au lieu d'un arc de Jordan.

- $DT$  est borné à l'extérieur du disque  $B(0, R)$ , avec  $R$  tel que  $\Gamma \subset B(0, R)$ ,
- $DT$  est borné dans  $L^p(\Pi \cap B(0, R))$  pour tout  $p < 4$  et  $R > 0$ .

*Démonstration.* Nous étudions dans un premier temps le cas où l'arc est le segment  $[-1, 1]$ . Nous avons dans ce cas une formule explicite pour  $T$ . En effet, la fonction de Joukowski

$$G(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

est un biholomorphisme entre l'extérieur du disque unité et l'extérieur du segment. Elle envoie le cercle  $C(0, R)$  sur l'ellipse paramétrée par  $\frac{1}{2}(R + 1/R)\cos\theta + \frac{1}{2}(R - 1/R)i\sin\theta$  avec  $\theta \in [0, 2\pi)$ , et elle envoie le cercle unité sur le segment.

En remarquant que  $G(z) = G(1/z)$  nous pouvons conclure que  $G$  est aussi un biholomorphisme entre l'intérieur du disque privé de 0 et l'extérieur du segment.

Nous avons donc pour tout  $z \notin [-1, 1]$  un unique antécédent de  $G$  dans  $D$  et un autre dans  $\text{int } D^c$ . Pour  $z \in [-1, 1]$  les antécédents sont  $\exp(\pm i \arccos z) = z \pm i\sqrt{1 - z^2}$ . Il y a donc exactement deux antécédents exceptés en  $-1$  et  $1$ . En fait, nous avons considéré que  $G$  est un recouvrement de degré deux de  $\mathbb{C}^*$  dans  $\mathbb{C}$ , ramifié en  $-1$  et  $1$ .

Soit  $\tilde{T}$  le biholomorphisme entre l'extérieur du segment et  $\text{int } D^c$ , tel que  $\tilde{T}^{-1} = G$ . Alors  $\tilde{T}_{\text{int}} = 1/\tilde{T}$  est le biholomorphisme entre l'extérieur du segment et  $D \setminus \{0\}$ , tel que  $\tilde{T}_{\text{int}}^{-1} = G$ .

Pour trouver les formules explicites de  $\tilde{T}$ , il suffit de résoudre un polynôme de degré deux, et nous trouvons :

$$\tilde{T}_+ = z + \sqrt{z^2 - 1} \quad \text{et} \quad \tilde{T}_- = z - \sqrt{z^2 - 1}.$$

Nous considérons que la fonction racine carrée est définie par  $\sqrt{z} = \sqrt{|z|}e^{i\theta/2}$  avec  $\theta$  l'argument de  $z$ , vérifiant  $-\pi < \theta \leq \pi$ . Il est alors facile d'observer que  $\tilde{T} = \tilde{T}_+$  sur  $\{z \mid \Re(z) > 0\} \cup i\mathbb{R}_+$  et que  $\tilde{T} = \tilde{T}_-$  sur  $\{z \mid \Re(z) < 0\} \cup i\mathbb{R}_-$ . Malgré cela,  $\tilde{T}$  est  $C^\infty(\mathbb{C} \setminus [-1, 1], \text{int } D^c)$  car  $\tilde{T} = G^{-1}$ .

Dans le cas du segment,  $T = \tilde{T}$  et les deux premières propriétés de la proposition sont alors évidentes. Un calcul aisé nous permet d'obtenir une formule explicite pour  $\tilde{T}'$  :

$$\tilde{T}'(z) = 1 \pm \frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}}, \quad (2.1.1)$$

avec le choix du signe qui se fait comme avant. Cette formule nous montre que  $D\tilde{T}$  explose aux extrémités comme l'inverse de la racine carrée de la distance,

ce qui est borné dans  $L^p_{\text{loc}}$  pour  $p < 4$ . De plus, une petite vérification nous montre que pour chaque  $x \in (-1, 1)$ , nous avons

$$\lim_{z \rightarrow x, \Im(z) > 0} T(z) = x + i\sqrt{1-x^2} = \tilde{T}_+(x)$$

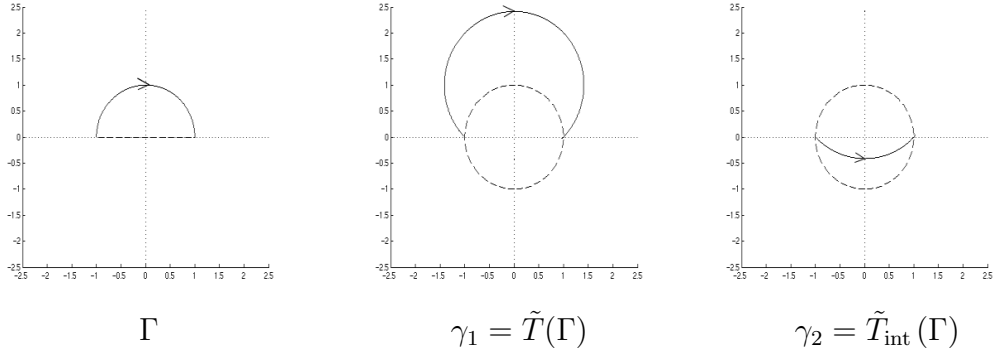
même si  $\Re(z) < 0$ , et

$$\lim_{z \rightarrow x, \Im(z) < 0} T(z) = x - i\sqrt{1-x^2} = \tilde{T}_-(x).$$

De la même manière,  $DT$  s'étend continûment de chaque côté de  $\Gamma$ , ce qui conclut la proposition dans le cas du segment.

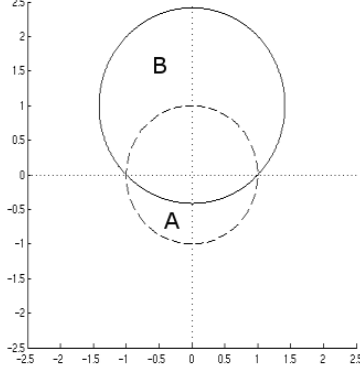
Traisons maintenant le cas général. Pour cela, nous considérons la courbe  $\tilde{\Gamma} \equiv \overline{\tilde{T}(\Gamma)} \cup \overline{\tilde{T}_{\text{int}}(\Gamma)} = \tilde{T}_+(\Gamma) \cup \tilde{T}_-(\Gamma)$ . Nous allons ici montrer que  $\tilde{\Gamma}$  est une courbe de Jordan  $C^{1,1}$ .<sup>2</sup>

Supposons dans un premier temps que  $\Gamma$  n'intersecte pas le segment  $(-1, 1)$ . Dans ce cas  $\gamma_1 \equiv \tilde{T}(\Gamma) \subset D^c$  et  $\gamma_2 \equiv \tilde{T}_{\text{int}}(\Gamma) \subset D$  sont des arcs de Jordan ouvert  $C^2$ , d'extrémités  $-1$  et  $1$  (voir Figure 1). D'où  $\tilde{T}(-1) = -1 = \tilde{T}_{\text{int}}(-1)$  et nous pouvons remarquer que  $\tilde{\Gamma}$  est une courbe de Jordan.



**FIGURE 1** :  $\Gamma$  n'intersecte pas  $[-1, 1]$

<sup>2</sup>Les quatre prochaines pages consistent à montrer cela. Dans une première lecture, nous conseillons de regarder les figures 1 et 2 pour se convaincre du résultat, puis de passer directement à la deuxième moitié de la page 35.



$$\tilde{\Gamma} = G^{-1}(\Gamma)$$

Nous disons que les arcs de Jordan sont *ouverts* car  $\tilde{T}'(\pm 1)$  n'est pas défini en  $-1$  et en  $1$ . Cependant, si nous utilisons l'abscisse curviligne,

$$s(t) = \int_0^t |\gamma'_1(\tau)| d\tau = \int_0^t |\tilde{T}'(\Gamma(\tau))| |\Gamma'(\tau)| d\tau, \quad (2.1.2)$$

qui sont bien définies et bornées car  $\tilde{T}'$  est borné dans  $L^1_{\text{loc}}$ , nous avons  $\frac{d\gamma_1}{ds} = \frac{\gamma'_1}{|\gamma'_1|}$ .

Pour prouver la continuité de la dérivée, nous devons donc montrer que  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma'_1}{|\gamma'_1|}$  et  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma'_2}{|\gamma'_2|}$  existent et sont opposées. Pour cela, nous utilisons le lemme suivant :

**Lemme 2.1.3.** *S'il existe un voisinage de 0 sur lequel  $\Gamma(t)$  n'intersecte pas le segment  $(-1, 1)$ , alors  $\frac{\tilde{T}'(\Gamma)}{|\tilde{T}'(\Gamma)|}(t)$  admet une limite quand  $t \rightarrow 0$ .*

*Preuve du lemme.* Comme  $\tilde{T}'(z) = 1 - z/\sqrt{z^2 - 1}$  sur un voisinage de  $-1$ , nous pouvons calculer

$$\frac{\tilde{T}'(\Gamma)}{|\tilde{T}'(\Gamma)|}(t) = \frac{|\sqrt{\Gamma^2 - 1}|}{\sqrt{\Gamma^2 - 1}}(t) \frac{\sqrt{\Gamma^2 - 1} - \Gamma}{|\sqrt{\Gamma^2 - 1} - \Gamma|}(t).$$

La seconde fraction tend vers 1 quand  $t \rightarrow 0$ . Nous avons de plus  $\Gamma'(0) \neq 0$  (par la définition d'une courbe  $C^2$ ), et nous pouvons donc écrire  $\Gamma^2(t) = 1 + at + o(t)$  pour  $a \in \mathbb{C}^*$ . Si  $a \notin \mathbb{R}^-$  alors pour tout  $t$  assez petit  $\{\Gamma^2(t) - 1\} \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$  et

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tilde{T}'(\Gamma)}{|\tilde{T}'(\Gamma)|}(t) = \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{a}} = e^{-i\theta/2} \text{ avec } \theta \equiv \arg a \in (-\pi, \pi).$$

Pour  $a \in \mathbb{R}^-$ , comme  $a = (\Gamma^2)'(0) = 2\Gamma(0)\Gamma'(0)$ , nous obtenons  $\Gamma'(0) \in \mathbb{R}^+$  ce qui signifie que la courbe est tangente au segment  $[-1, 1]$ . Nous avons alors deux cas :

- si  $\Gamma$  est au dessus du segment sur ce voisinage, alors  $\Im(\Gamma^2(t) - 1) < 0$  et

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tilde{T}'(\Gamma)}{|\tilde{T}'(\Gamma)|}(t) = i,$$



- si  $\Gamma$  est en dessous du segment sur ce voisinage, alors  $\Im(\Gamma^2(t) - 1) > 0$  et

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tilde{T}'(\Gamma)}{|\tilde{T}'(\Gamma)|}(t) = -i.$$

□

Continuons la démonstration de la proposition 2.1.2. Le lemme précédent nous permet d'observer que  $\tilde{\Gamma}$  est  $C^1$  en  $-1$ , car

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma'_1}{|\gamma'_1|}(t) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tilde{T}'(\Gamma)}{|\tilde{T}'(\Gamma)|}(t) \frac{\Gamma'}{|\Gamma'|}(t) = - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|\tilde{T}^2(\Gamma)|}{\tilde{T}^2(\Gamma)}(t) \frac{\tilde{T}'(\Gamma)}{|\tilde{T}'(\Gamma)|}(t) \frac{\Gamma'}{|\Gamma'|}(t) \\ &= - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma'_2}{|\gamma'_2|}(t), \end{aligned}$$

parce que  $\tilde{T}_{\text{int}} = 1/\tilde{T}$ .

Pour prouver que  $\tilde{\Gamma}'$  est Lipschitz, nous allons montrer que  $\gamma'_1$  et  $\gamma'_2$  sont  $C^1$  avec la coordonnée curviligne notée par  $s$  et définie dans (2.1.2) ( $t$  correspond à la paramétrisation initiale). Soit  $f_1(s) = \frac{d\gamma_1}{ds}(s) = \frac{\gamma'_1(t)}{|\gamma'_1(t)|}$ , où les primes correspondent aux dérivées par rapport à  $t$ , nous devons alors prouver que  $\frac{df_1}{ds}$  admet une limite quand  $s \rightarrow 0$ . Or, nous avons

$$\frac{df_1}{ds}(s) = \frac{\gamma''_1}{|\gamma'_1|^2} - \frac{\gamma'_1}{|\gamma'_1|^4} \langle \gamma'_1, \gamma''_1 \rangle = \frac{1}{|\gamma'_1|^2} \left( \gamma''_1 - \frac{\gamma'_1}{|\gamma'_1|} \langle \frac{\gamma'_1}{|\gamma'_1|}, \gamma''_1 \rangle \right) \equiv \frac{1}{|\gamma'_1|^2} A,$$

avec  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  représentant le produit scalaire entre deux vecteurs (en identifiant  $\mathbb{C}$  à  $\mathbb{R}^2$ ). Nous calculons alors

$$\begin{aligned} \gamma'_1 &= \tilde{T}'(\Gamma)\Gamma', \\ \gamma''_1 &= \tilde{T}''(\Gamma)(\Gamma')^2 + \tilde{T}'(\Gamma)\Gamma'', \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{T}(z) &= z - \sqrt{z^2 - 1}, \\ \tilde{T}'(z) &= 1 - z/\sqrt{z^2 - 1}, \\ \tilde{T}''(z) &= 1/\sqrt{z^2 - 1}^3. \end{aligned}$$

Grâce à des développements de Taylor au voisinage de zéro, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= -1 + at + bt^2 + O(t^3), \\ \Gamma^2(t) &= 1 - 2at + (a^2 - 2b)t^2 + O(t^3), \\ 1/\sqrt{\Gamma^2 - 1}(t) &= \frac{1}{\sqrt{-2a}} \frac{1}{\sqrt{t}} (1 - t(a^2 - 2b)/(-4a)) + O(t^{3/2}). \end{aligned}$$

La dernière expression étant vraie dans tous les cas, sauf quand  $\Gamma$  est tangente au segment ( $a \in \mathbb{R}^+$ ) et au dessus du segment au voisinage de  $-1$ . Dans ce dernier cas, nous remplaçons  $\frac{1}{\sqrt{-2a}}$  par  $i$  au lieu de  $-i$ .

Alors

$$\begin{aligned}\tilde{T}'(\Gamma) &= \frac{1}{\sqrt{-2a}} \frac{1}{\sqrt{t}} + 1 + O(t^{1/2}), \\ \tilde{T}''(\Gamma) &= \frac{1}{\sqrt{-2a}^3} \frac{1}{\sqrt{t}^3} + \frac{C_1}{\sqrt{t}} + O(t^{1/2}).\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\gamma_1' &= \frac{a}{\sqrt{-2a}} \frac{1}{\sqrt{t}} + a + O(t^{1/2}), \\ \frac{\gamma_1'}{|\gamma_1'|} &= \frac{a}{|a|} \frac{|\sqrt{-2a}|}{\sqrt{-2a}} + C_2 \sqrt{t} + O(t), \\ \gamma_1'' &= \frac{a^2}{\sqrt{-2a}^3} \frac{1}{\sqrt{t}^3} + C_3 \frac{1}{\sqrt{t}} + O(1).\end{aligned}$$

Nous calculons désormais  $A$  :

$$\begin{aligned}\gamma_1'' - \frac{\gamma_1'}{|\gamma_1'|} < \frac{\gamma_1'}{|\gamma_1'|}, \gamma_1'' > &= \frac{1}{\sqrt{t}^3} \left( \frac{a^2}{\sqrt{-2a}^3} - \frac{a}{|a|} \frac{|\sqrt{-2a}|}{\sqrt{-2a}} \left\langle \frac{a}{|a|} \frac{|\sqrt{-2a}|}{\sqrt{-2a}}, \frac{a^2}{\sqrt{-2a}^3} \right\rangle \right) \\ &\quad + C_4 \frac{1}{t} + O(t^{-1/2}).\end{aligned}$$

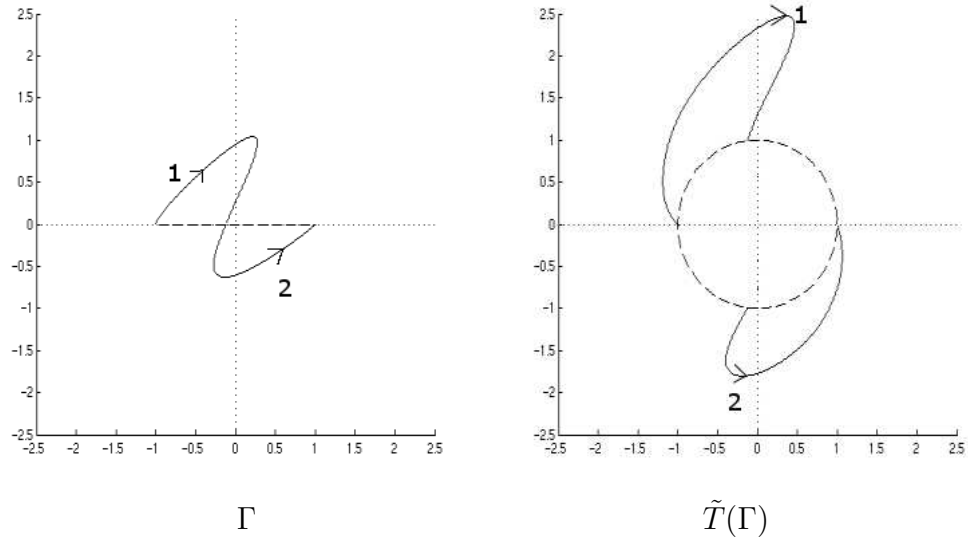
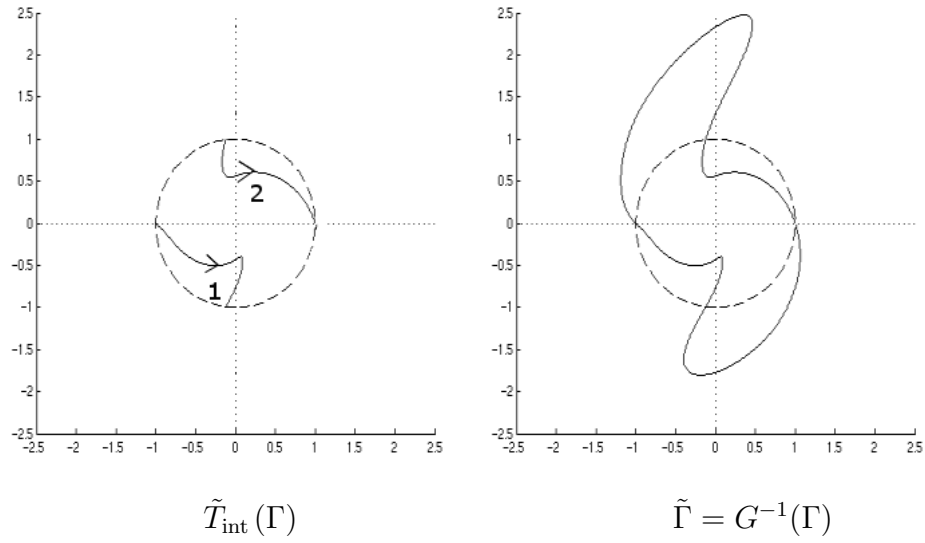
Nous pouvons aisément vérifier que  $\arg(a^2/\sqrt{-2a}^3) = \pm\pi + \arg(a/\sqrt{-2a})$ , et

$$\frac{a^2}{\sqrt{-2a}^3} - \frac{a}{|a|} \frac{|\sqrt{-2a}|}{\sqrt{-2a}} \left\langle \frac{a}{|a|} \frac{|\sqrt{-2a}|}{\sqrt{-2a}}, \frac{a^2}{\sqrt{-2a}^3} \right\rangle = 0.$$

Ceci donne alors que  $df_1/ds = C_5 + O(t^{1/2})$ , ce qui signifie que  $df_1/ds$  a une limite quand  $s \rightarrow 0$ . Cet argument s'applique aussi à  $\gamma_2$ , en faisant le calcul avec  $\tilde{T}_{\text{int}}(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$ . Nous avons donc  $d\gamma_1/ds$  et  $d\gamma_2/ds$  qui sont  $C^1$  sur  $[0, 1]$ , ce qui nous permet de conclure que  $\tilde{\Gamma}'$  est Lipschitz car  $\tilde{\Gamma} = \gamma_1 \cup \gamma_2$ .

Si nous considérons maintenant que  $\Gamma$  intersecte  $[-1, 1]$  en un point  $x = \Gamma(t_0)$ , alors  $\tilde{T}(\Gamma)$  est l'union de deux arcs de Jordan avec un saut :  $\tilde{T}(\Gamma(t_0^-)) = 1/\tilde{T}(\Gamma(t_0^+))$  (voir la figure 2). Dans ce cas,  $\tilde{T}_{\text{int}}(\Gamma)$  est aussi l'union de deux arcs de Jordan qui étend  $\tilde{T}(\Gamma)$ . En effet

$$\tilde{T}_{\text{int}}(\Gamma(t_0^+)) = 1/\tilde{T}(\Gamma(t_0^+)) = \tilde{T}(\Gamma(t_0^-)).$$

FIGURE 2 :  $\Gamma$  intersecte  $[-1, 1]$  en un point

Pour montrer la continuité de  $\tilde{\Gamma}'$  en  $\tilde{T}(\Gamma(t_0))$ , nous allons considérer par exemple que  $x \in (0, 1)$  et que  $\Im(\Gamma(t_0^-)) > 0$  et  $\Im(\Gamma(t_0^+)) < 0$ . Nous pouvons alors calculer

$$\begin{aligned}
 \tilde{T}(\Gamma(t_0^-)) &= x + i\sqrt{1-x^2}, \\
 \tilde{T}'(\Gamma(t_0^+)) &= 1 + xi/\sqrt{1-x^2}, \text{ car } \tilde{T} = T_+ \text{ dans un voisinage de } x \\
 \tilde{T}'(\Gamma(t_0^-)) &= 1 - xi/\sqrt{1-x^2},
 \end{aligned}$$

afin de vérifier que  $-\tilde{T}(\Gamma(t_0^-))^2\tilde{T}'(\Gamma(t_0^+)) = \tilde{T}'(\Gamma(t_0^-))$ , ce qui nous permet de conclure que

$$\tilde{T}'_{\text{int}}(\Gamma(t_0^+)) = -1/\tilde{T}(\Gamma(t_0^+))^2\tilde{T}'(\Gamma(t_0^+)) = \tilde{T}'(\Gamma(t_0^-)).$$

Tous les autres cas se font de la même manière. Nous ferons juste le cas où  $x = 0$ , alors

$$\begin{aligned}\tilde{T}(\Gamma(t_0^-)) &= \pm i, \\ \tilde{T}'(\Gamma(t_0^+)) &= 1, \\ \tilde{T}'(\Gamma(t_0^-)) &= 1,\end{aligned}$$

et comme  $-(\pm i)^2 = 1$ , nous obtenons la continuité de  $\tilde{\Gamma}'$ . Comme  $\tilde{\Gamma}''$  est borné,  $\tilde{\Gamma}'$  est Lipschitz, d'où  $\tilde{\Gamma}$  est une courbe fermée  $C^{1,1}$ . Nous avons ici étudié juste le cas d'une ou zéro intersection de  $\Gamma$  avec le segment  $(-1, 1)$  mais notre argument fonctionne dans le cas général car nous avons supposé que le nombre d'intersections était fini. Par exemple, si  $\Gamma \subset [-1, 1]$  sur un voisinage de  $-1$ , alors  $\tilde{\Gamma} \subset S$ , d'où  $\tilde{\Gamma}$  est évidemment  $C^{1,1}$  sur le voisinage de  $-1$ .

Nous notons par  $\tilde{\Pi}$  la composante connexe non-bornée de  $\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{\Gamma}$ . Nous affirmons ici que nous pouvons construire  $T_2$ , un biholomorphisme entre  $\tilde{\Pi}$  et  $\tilde{\Pi}$ , tel que  $T_2^{-1} = G$ . En effet, si nous nommons  $A = \tilde{\Pi} \cap \bar{D}$  et  $B = (\text{int } \tilde{\Pi}^c) \cap D^c$  (voir la figure de la page 31), nous observons que  $B = 1/A$ , car  $\gamma_2 = 1/\gamma_1$  et  $1/S = S$ . Comme  $G(1/z) = G(z)$ , que  $G$  est bijective sur  $\text{int } D^c$  et que  $1/(\partial D \cap \tilde{\Pi}) \subset \tilde{\Pi}^c$ ,  $G$  est donc bijective sur  $\tilde{\Pi}$  et  $G(\tilde{\Pi}) = \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ . Nous avons alors une fonction  $T_2$  envoyant l'extérieur de l'arc de Jordan sur l'extérieur d'un domaine extérieur dont le bord est une courbe de Jordan  $C^{1,1}$ , telle que  $T_2^{-1}(z) = 1/2(z + 1/z)$ .

Nous utilisons ensuite le théorème de Riemann qui donne l'existence d'une application conforme  $F$  entre  $\tilde{\Pi}$  et  $D^c$  qui vérifie  $F(\infty) = \infty$ . Alors  $T \equiv F \circ T_2$  envoie bien  $\Pi$  sur  $D^c$ . Pour finir cette preuve, nous utilisons le théorème de Kellogg-Warschawski (voir le théorème 3.6 de [32], qui peut être appliqué au domaine extérieur), pour affirmer que  $F$  et  $F'$  s'étendent continûment jusqu'au bord, car  $\tilde{\Gamma}$  est  $C^{1,1}$ . En rajoutant le fait que  $DF$  et  $DF^{-1}$  sont bornés à l'infini (voir la remarque 2.1.5), nous obtenons les mêmes propriétés que dans le cas du segment, en particulier que  $DT$  explose aux extrémités de la courbe comme l'inverse de la racine carrée de la distance (voir (2.1.1)).  $\square$

*Remarque 2.1.4.* Si  $\Gamma$  intersecte le segment  $[-1, 1]$  une infinité de fois, alors la courbe  $\tilde{\Gamma}$  n'est peut être même pas  $C^1$ . Par exemple une courbe qui correspond à  $t \mapsto (t - 1; e^{1/t^2} \sin(1/t))$ ,  $t \in [0, 1/4]$  admet deux suites  $t_n \rightarrow 0$  et  $\tilde{t}_n \rightarrow 0$  telles que  $\tilde{T}'(\Gamma)/|\tilde{T}'(\Gamma)|$  tend respectivement vers  $i$  et  $-i$ .

*Remarque 2.1.5.* Si  $H$  est un biholomorphisme de l'extérieur d'un domaine  $A$  (ouvert non vide, connexe, simplement connexe) sur  $D^c$ , tel que  $H(\infty) = \infty$ , alors il existe un réel non nul  $\beta$  et une fonction holomorphe  $h : A^c \rightarrow \mathbb{C}$  telle que :

$$H(z) = \beta z + h(z),$$

avec

$$h'(z) = O\left(\frac{1}{|z|^2}\right), \text{ quand } |z| \rightarrow \infty.$$

Cette propriété peut être appliquée à  $F$  de la démonstration précédente pour remarquer que  $DF$  et  $DF^{-1}$  sont bornés. Elle peut aussi être appliquée à  $T$  car il envoie l'extérieur d'un ouvert non vide sur l'extérieur de  $B(0, 2)$ .

*Preuve de la remarque 2.1.5.* Après une translation, nous pouvons supposer que  $0 \in \text{int } A$ , et nous considérons  $W(z) = 1/H(1/z)$ . La fonction  $W$  est holomorphe sur un voisinage de 0 et peut être développée comme  $W(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ . Nous avons  $W(0) = 0$  et donc  $a_0 = 0$ . Nous voulons maintenant montrer que  $a_1 \neq 0$  grâce à l'injectivité. En effet, si  $a_1 = 0$ , nous considérons le premier  $a_k$  non nul, et nous observons qu'il existe  $R > 0$  tel que  $|W(z) - a_k z^k| \leq |a_k| |z^k|$  sur  $B(0, R)$ . Nous notons ensuite  $g(z) = a_k z^k$ . Sur  $\partial B(0, R)$ ,  $|W(z) - g(z)| \leq |a_k| R^k \leq |g(z)|$ . Nous appliquons alors le théorème de Rouché pour conclure que  $W$  et  $g$  ont le même nombre de zéros (en comptant l'ordre de multiplicité) sur  $B(0, R)$ , ce qui est en contradiction avec le fait que  $W$  est bijective et  $g$  non. Nous avons donc  $a_1 \neq 0$  et  $H(z) = z/a_1 + b_0 + b_1/z + \dots$ , ce qui termine la preuve. En multipliant  $H$  par  $|a_1|/\bar{a}_1$ , nous pouvons de plus supposer que  $\beta = 1/a_1$  est réel.  $\square$

### Remarque sur le redressement d'une courbe vers le segment

Dans la démonstration de la proposition 2.1.2, nous passons donc du cas du segment au cas général en appliquant d'abord l'inverse de la fonction de Joukowski puis le théorème de Riemann. Le moyen naturel de cette généralisation aurait été de redresser  $\Gamma$  vers le segment, afin d'appliquer ce qui a été fait dans le cas du segment. Mais pour cela, nous avons besoin d'un redressement de la courbe par une application holomorphe  $C^\infty$  jusqu'au bord. Ce redressement est récemment utilisé en géométrie, mais je n'ai trouvé aucune bonne référence. Une idée de la preuve de ce redressement serait de se servir des applications quasi-conformes. Pour cela, nous redressons la courbe sur le segment par une application  $C^\infty$  jusqu'au bord, mais pas holomorphe, et nous la corrigeons en utilisant le théorème d'uniformisation (aussi appelé théorème d'Ahlfors Bers). Nous avons ici besoin de la version  $C^\infty$  prouvée par

Lichtenstein dans [21]. Une bonne introduction à ce théorème, ainsi qu'une preuve peuvent être trouvées dans [7]. Pour résumer ce théorème, nous devons parler de structure complexe linéaire, qui correspond à un champ d'ellipse sur les plans tangents. Une application différentielle transforme la structure complexe standard, qui est un champ de cercle, en une structure complexe linéaire. En particulier, une application qui envoie les cercles sur des cercles est holomorphe. Le théorème d'uniformisation est la réciproque : pour  $\sigma$  une structure complexe  $C^\infty$ , il existe un  $C^\infty$  difféomorphisme qui transforme  $\sigma$  en la structure complexe standard. En connaissant ce théorème, le redressement holomorphe,  $C^\infty$  jusqu'au bord en est une application directe. Cependant, les deux références données précédemment sur le théorème d'Ahlfors Bers ne traitent que le cas du plan entier, alors que nous avons ici besoin d'une version qui envoie  $\mathbb{R}^2 \setminus [-1, 1]$  sur lui-même,  $C^\infty$  jusqu'au bord. Il existe une version sur le demi-plan, et en utilisant le fait que l'application racine carrée envoie le plan privé d'une demi droite sur le demi plan, nous pouvons en déduire une version sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}^+$ . En réitérant cet argument sur l'autre extrémité (et en gardant bien en tête que nous cherchons une propriété locale), nous en déduirons la version nécessaire ici. Par manque de référence, nous préférons la première preuve qui a été présentée dans la démonstration de la proposition 2.1.2. Cette méthode pourrait cependant servir à prouver que l'hypothèse 2.1.6 est vérifiée pour une famille  $\Omega_\varepsilon$  qui tend vers la courbe (dans un sens à définir), car nous pourrions obtenir des estimations de l'application d'Ahlfors-Bers en considérant l'équation de Beltrami. Pour l'avenir, nous chercherons une démonstration de l'hypothèse plus basée sur une estimation de l'application de Riemann  $F$ .

### 2.1.2 L'aplatissement de l'obstacle

Nous introduisons dans cette sous-partie la famille d'obstacles qui tend vers une courbe. Dans tous les problèmes suivants, nous fixons  $\omega_0$  tel que son support soit compact, n'intersectant pas la courbe  $\Gamma$ .

Nous considérons une famille d'obstacles  $\Omega_\varepsilon$  contenant  $\Gamma$  et disjoints du support de  $\omega_0$ . Si nous notons  $T_\varepsilon$  le biholomorphisme entre  $\Pi_\varepsilon \equiv \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}$  et  $D^c$ , nous supposons que les propriétés suivantes sont vérifiées :

**Hypothèse 2.1.6.** *La famille de biholomorphismes  $\{T_\varepsilon\}$  vérifie*

- (i)  $\|(T_\varepsilon - T)/T\|_{L^\infty(\Pi_\varepsilon)} \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,
- (ii)  $\det(DT_\varepsilon^{-1})$  est bornée sur  $D^c$  indépendamment de  $\varepsilon$ ,
- (iii) pour tout  $R > 0$ ,  $\|DT_\varepsilon - DT\|_{L^3(B(0,R) \cap \Pi_\varepsilon)} \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,
- (iv) pour  $R > 0$  assez grand, il existe  $C_R > 0$  tel que  $|DT_\varepsilon(x)| \leq C_R$  sur  $B(0, R)^c$ .

(v) pour  $R > 0$  assez grand, il existe  $C_R > 0$  tel que  $|D^2T_\varepsilon(x)| \leq \frac{C_R}{|x|}$  sur  $B(0, R)^c$ .

*Remarque 2.1.7.* Nous remarquons directement que la propriété (iii) implique que pour tout  $R$ ,  $DT_\varepsilon$  est borné dans  $L^p(B(0, R) \cap \Pi_\varepsilon)$  indépendamment de  $\varepsilon$ , pour  $p \leq 3$ . De plus, la condition (i) nous assure que  $T_\varepsilon \rightarrow T$  uniformément sur  $B(0, R) \cap \Pi_\varepsilon$  pour tout  $R > 0$ .

Nous donnons maintenant un exemple d'une famille d'obstacles vérifiant l'hypothèse 2.1.6.

*Exemple 2.1.8.* Nous considérons  $\Omega_\varepsilon \equiv T^{-1}(B(0, 1 + \varepsilon) \setminus D)$ . Dans ce cas,  $T_\varepsilon = \frac{1}{1+\varepsilon}T$ , ce qui vérifie l'hypothèse précédente. En fait, en se servant de la proposition 2.1.2, nous avons que  $\|DT_\varepsilon - DT\|_{L^p(B(0, R) \cap \Pi_\varepsilon)} \rightarrow 0$  pour tout  $p < 4$ , et en utilisant la remarque 2.1.5 nous observons que  $|DT_\varepsilon(x)| \leq \frac{C_R}{|x|^2}$  et  $|D^2T_\varepsilon(x)| \leq \frac{C_R}{|x|^3}$  sur  $B(0, R)^c$ , mais nous n'avons pas besoin d'estimation aussi forte. Si  $\Gamma$  est un segment, alors  $\Omega_\varepsilon$  est l'intérieur d'une ellipse entourant le segment.

Nous notons naturellement  $\Gamma_\varepsilon \equiv \partial\Omega_\varepsilon$  et  $\Pi_\varepsilon \equiv \text{int } \Omega_\varepsilon^c$ .

Pour finir cette partie, nous verrons maintenant que l'hypothèse 2.1.6 veut en effet dire que “la famille d'obstacles s'aplatit vers la courbe”.

**Proposition 2.1.9.** *Soit  $\{\Omega_\varepsilon\}$  une famille d'obstacles (domaine régulier, ouvert, connexe et simplement connexe) qui induit une famille de biholomorphismes  $\{T_\varepsilon\}$  vérifiant l'hypothèse 2.1.6, alors pour tout compact  $K$  de  $\Pi$ , il existe  $\varepsilon_K > 0$  tel que  $\Omega_\varepsilon \cap K = \emptyset, \forall \varepsilon \leq \varepsilon_K$ .*

*Démonstration.* Si  $K$  est un compact de  $\Pi$ , alors  $T(K)$  est un ensemble connexe simplement connexe de  $D^c$ . Soit  $d = \text{dist}(D, T(K)) > 0$ , alors il existe  $\varepsilon_K$  tel que pour tout  $\varepsilon \leq \varepsilon_K$ ,  $|T_\varepsilon(x) - T(x)| < \inf(d/2, 1)$  (d'après la remarque 2.1.7 ceci est vrai  $\forall x \in B(0, R)$  avec  $R$  assez grand). Dans ce cas là,  $\Gamma \subset \Omega_\varepsilon$  et par continuité,  $T(\Omega_\varepsilon)$  ressemble à une couronne avec pour bord  $\partial D$  et  $T(\partial\Omega_\varepsilon)$ . Sachant que  $\partial D = T_\varepsilon(\partial\Omega_\varepsilon)$  alors nous savons que  $T(\Omega_\varepsilon)$  est inclus dans la boule  $B(0, 1 + d/2)$  et donc que  $\text{dist}(T(K), T(\Omega_\varepsilon)) \geq d/2$  pour tout  $\varepsilon \leq \varepsilon_K$ . Ceci signifie bien que  $K$  et  $\Omega_\varepsilon$  sont disjoints.  $\square$

Cette limite  $T_\varepsilon \rightarrow T$  nous donne des propriétés précises qui sont bien plus pratiques que dans le cas où l'obstacle tend homothétiquement vers un point [12, 13], car dans leur cas  $\Omega_\varepsilon \equiv \varepsilon\Omega$  et  $T_\varepsilon = T(x/\varepsilon)$  (avec  $T$  le biholomorphisme entre  $\Omega^c$  et  $D^c$ ) ne converge plus.

## 2.2 Fluide dans les domaines extérieurs

Si dans cette thèse, le domaine varie avec  $\varepsilon$ , nous cherchons une donnée initiale qui soit la même pour tout  $\varepsilon$ . Nous constatons donc que nous ne pouvons pas prendre un champ de vitesse uniforme car il doit être tangent au bord. Nous choisirons donc un tourbillon initial  $\omega_0 = \text{rot } u_0^\varepsilon \in C_c^\infty$  dont le support est disjoint de tous les  $\Omega_\varepsilon$ . Nous nous donnerons aussi la circulation  $\gamma = \int_{\Gamma_\varepsilon} u_0^\varepsilon \cdot \mathbf{ds}$  du champ de vitesse autour de l'obstacle. L'objectif de cette partie est de montrer que nous pouvons déterminer de manière unique le champ de vitesse (de divergence nulle, tangent au bord et de limite nulle à l'infini) dans  $\Pi_\varepsilon$  en fonction de  $\omega_0$  et  $\gamma$ . Nous trouvons en plus la formule explicite, appelée loi de Biot-Savart.

### 2.2.1 Le noyau de la loi de Biot-Savart

Soit  $\Omega_\varepsilon$  un ensemble du plan borné, ouvert, connexe et simplement connexe, tel que son bord, noté  $\Gamma_\varepsilon$ , est une courbe de Jordan  $C^\infty$ . Nous notons par  $\Pi_\varepsilon$  la composante connexe non bornée de  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_\varepsilon$ , telle que  $\Omega_\varepsilon^c = \overline{\Pi_\varepsilon}$  et par  $T_\varepsilon$  le biholomorphisme entre  $\Pi_\varepsilon$  et  $D^c$ .

Nous notons par  $G^\varepsilon = G^\varepsilon(x, y)$  la fonction de Green, dont la forme explicite est :

$$G^\varepsilon(x, y) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)|}{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)^*| |T_\varepsilon(y)|}$$

en notant  $x^* = \frac{x}{|x|^2}$ . Nous rappelons que la fonction de Green est l'unique fonction qui vérifie :

$$\begin{cases} \Delta_y G^\varepsilon(x, y) = \delta(y - x) \text{ pour } x, y \in \Pi_\varepsilon \\ G^\varepsilon(x, y) = 0 \text{ pour } y \in \Gamma_\varepsilon \\ G^\varepsilon(x, y) = G^\varepsilon(y, x) \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Le noyau de la loi de Biot-Savart est alors  $K^\varepsilon = K^\varepsilon(x, y) \equiv \nabla_x^\perp G^\varepsilon(x, y)$ . En notant  $(x_1, x_2)^\perp = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ , la formule explicite de  $K^\varepsilon$  est

$$K^\varepsilon(x, y) = \frac{1}{2\pi} DT_\varepsilon^t(x) \left( \frac{(T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y))^\perp}{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)|^2} - \frac{(T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)^*)^\perp}{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)^*|^2} \right), \quad (2.2.2)$$

et nous nommons l'opérateur intégral associé par

$$f \mapsto K^\varepsilon[f] = \int_{\Pi_\varepsilon} K^\varepsilon(x, y) f(y) dy.$$



Le champ de vecteur  $v = K^\varepsilon[f]$  est une solution du système elliptique :

$$\begin{cases} \operatorname{div} v = 0 & \text{dans } \Pi_\varepsilon \\ \operatorname{rot} v = f & \text{dans } \Pi_\varepsilon \\ v \cdot \hat{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_\varepsilon \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |v| = 0 \end{cases}$$

Nous notons  $\hat{n}$  le vecteur unitaire normal extérieur de  $\Pi_\varepsilon$  à  $\Gamma_\varepsilon$ . Dans toute la suite l'intégrale sur les contours sera prise dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, donc tel que  $\oint_{\Gamma_\varepsilon} F \cdot \mathbf{ds} = - \oint_{\Gamma_\varepsilon} F \cdot \hat{n}^\perp ds$ .

Nous aurons besoin du comportement de  $K^\varepsilon$  à l'infini. Pour cela, nous utiliserons la relation suivante qui sera aussi souvent utilisée pour estimer la vitesse :

$$\left| \frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2} \right| = \frac{|a - b|}{|a||b|}, \quad (2.2.3)$$

qui peut être vérifiée en passant au carré de chaque côté de l'équation.

En appliquant cette égalité, ainsi que l'hypothèse 2.1.6 i) et la remarque 2.1.5 nous obtenons qu'il existe  $R$  tel que

$$|K^\varepsilon[f]|(x) \leq \frac{C_1}{|x|^2} \text{ sur } B(0, R)^c, \quad (2.2.4)$$

où  $C_1$  dépend de la taille du support de  $f$  ainsi que de  $\|f\|_{L^1}$ .

### 2.2.2 Champ harmonique

Soit  $H^\varepsilon(x)$  l'unique champ harmonique sur  $\Pi_\varepsilon$  qui vérifie

$$\begin{cases} \operatorname{div} H^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Pi_\varepsilon \\ \operatorname{rot} H^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Pi_\varepsilon \\ H^\varepsilon \cdot \hat{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_\varepsilon \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |H^\varepsilon| = 0 \\ \oint_{\Gamma_\varepsilon} H^\varepsilon \cdot \mathbf{ds} = 1 \end{cases}$$

L'existence et l'unicité de  $H^\varepsilon$  ont été démontrées dans [12]. De plus, nous avons la formule explicite

$$H^\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \nabla^\perp \log |T_\varepsilon(x)| = \frac{1}{2\pi} DT_\varepsilon^t(x) \left( \frac{(T_\varepsilon(x))^\perp}{|T_\varepsilon(x)|^2} \right). \quad (2.2.5)$$

En utilisant une nouvelle fois l'hypothèse 2.1.6 i) et la remarque 2.1.5, nous trouvons le comportement à l'infini :

$$H^\varepsilon = O(1/|x|) \text{ quand } |x| \rightarrow \infty. \quad (2.2.6)$$

Nous pouvons désormais écrire l'expression qui donne la vitesse en fonction du tourbillon et de la circulation de la vitesse autour de l'obstacle.

### 2.2.3 La loi de Biot-Savart

Soit  $u = u(x, t) = (u_1(x_1, x_2, t), u_2(x_1, x_2, t))$  la vitesse d'un fluide à l'extérieur de  $\Omega_\varepsilon$ . Nous supposons que  $u$  est tangent à  $\Gamma_\varepsilon$  et que  $u \rightarrow 0$  quand  $|x| \rightarrow \infty$ . Une quantité importante pour l'étude des fluides est le tourbillon :

$$\omega = \text{rot}(u) = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1.$$

La vitesse et le tourbillon sont donc couplés par le système elliptique :

$$\begin{cases} \text{div } u = 0 & \text{dans } \Pi_\varepsilon \times [0, \infty) \\ \text{rot } u = \omega & \text{dans } \Pi_\varepsilon \times [0, \infty) \\ u \cdot \hat{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_\varepsilon \times [0, \infty) \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |u| = 0 & \text{pour } t \in [0, \infty) \end{cases}$$

Les deux sous-parties précédentes nous assurent donc que la solution générale à ce système est donnée par

$$u = u(x, t) = K^\varepsilon[\omega(\cdot, t)](x) + \alpha H^\varepsilon(x) \quad (2.2.7)$$

pour une fonction  $\alpha = \alpha(t)$ . En notant la circulation de  $u$  autour de l'obstacle par  $\gamma \equiv \oint_{\Gamma_\varepsilon} u \cdot \mathbf{ds}$ , nous avons grâce au théorème de Stokes

$$\alpha(t) = \gamma + \int_{\Pi_\varepsilon} \omega(x, t). \quad (2.2.8)$$

Les détails de ce calcul peuvent être trouvés dans [12].

### 2.2.4 Fonctions de troncature

Nous étudierons donc les fluides à l'extérieur d'obstacles dépendants de  $\varepsilon$ , et si nous voulons comparer les vitesses et tourbillons pour les différents  $\varepsilon$ , un moyen est d'étendre ces fonctions sur  $\mathbb{R}^2$  en les multipliant par une fonction de troncature dépendante de  $\varepsilon$ , s'annulant sur un petit voisinage de  $\Omega_\varepsilon$ .

Soit  $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R})$  une fonction croissante telle que  $0 \leq \Phi \leq 1$ ,  $\Phi(s) = 1$  si  $s \geq 2$  et  $\Phi(s) = 0$  si  $s \leq 1$ . Nous définissons alors

$$\Phi^\varepsilon = \Phi^\varepsilon(x) = \Phi\left(\frac{|T_\varepsilon(x)| - 1}{\varepsilon}\right).$$

Nous avons clairement  $\Phi^\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ , s'annulant dans un voisinage de  $\overline{\Omega^\varepsilon}$ .

Nous aurons besoin de quelques propriétés de  $\nabla \Phi^\varepsilon$  que nous regroupons dans le lemme suivant.

**Lemme 2.2.1.** *La fonction  $\Phi^\varepsilon$  définie précédemment vérifie les propriétés suivantes :*

- (a)  $H^\varepsilon \cdot \nabla \Phi^\varepsilon \equiv 0$  sur  $\Pi_\varepsilon$ ,
- (b) *il existe une constante  $C > 0$  telle que la mesure de Lebesgue du support de  $\Phi^\varepsilon - 1$  soit bornée par  $C\varepsilon$ .*

*Démonstration.* Nous remarquons tout d'abord que

$$H^\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \nabla^\perp \log |T_\varepsilon(x)| = \frac{1}{2\pi |T_\varepsilon(x)|} \nabla^\perp |T_\varepsilon(x)|,$$

et que

$$\nabla \Phi^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \Phi' \left( \frac{|T_\varepsilon(x)| - 1}{\varepsilon} \right) \nabla |T_\varepsilon(x)|, \quad (2.2.9)$$

ce qui donne directement le premier point.

De plus, le support de  $\Phi^\varepsilon - 1$  est contenu dans l'ensemble  $\{x \in \Pi_\varepsilon | 1 \leq |T_\varepsilon(x)| \leq 1 + 2\varepsilon\}$ . La mesure de Lebesgue peut être estimée en écrivant

$$\int_{1 \leq |T_\varepsilon(x)| \leq 1 + 2\varepsilon} dx = \int_{1 \leq |z| \leq 1 + 2\varepsilon} |\det(DT_\varepsilon^{-1})|(z) dz \leq C_1 \varepsilon$$

pour  $\varepsilon$  assez petit. □

L'objectif étant d'étendre les vitesses et les tourbillons, nous devons nous demander si les résultats dépendent de l'extension. Nous observerons que la limite des vitesses et tourbillons n'est pas affectée par le choix de la construction de l'extension (voir page 50).

Nous finissons cette partie en introduisant une fonction troncature d'un voisinage de  $\Omega_\varepsilon$  s'annulant sur une boule plus grosse. Pour  $\lambda \geq 2$ , nous notons

$$\Phi^{\varepsilon, \lambda} = \Phi^{\varepsilon, \lambda}(x) \equiv \Phi\left(\frac{|T_\varepsilon(x)| - 1}{\lambda}\right). \quad (2.2.10)$$

Grâce à la convergence uniforme des  $T_\varepsilon$  vers  $T$  sur les ensembles bornés (voir l'hypothèse 2.1.6 (i)), nous pouvons remarquer que  $\Phi^{\varepsilon, \lambda}$  s'annule sur une

boule de rayon  $C_1\lambda$  et qu'il vaut 1 à l'extérieur d'une boule plus grosse de rayon  $C_2\lambda$ , avec  $C_1$  et  $C_2$  indépendants de  $\varepsilon$ . En conséquence, la largeur de l'anneau où  $\Phi^{\varepsilon,\lambda}$  est non constant peut être prise indépendante de  $\varepsilon$ .

Si cela peut paraître étrange de ne pas choisir une fonction troncature qui s'annule sur  $B(0, 10)$  et vaille 1 à l'extérieur de  $B(0, 11)$ , c'est que nous nous servons dans le Chapitre 4 du fait que

$$H^\varepsilon \cdot \nabla \Phi^{\varepsilon,\lambda} \equiv 0 \text{ sur } \Pi_\varepsilon. \quad (2.2.11)$$

Ceci se démontre exactement de la même manière que le point (a) du lemme précédent, et cela nous permettra d'enlever le champ harmonique  $H^\varepsilon$  qui n'est pas  $L^2$  à l'infini (voir (2.2.6)).



# Chapitre 3

## Euler en dimension deux

### Résumé

Dans ce chapitre, nous étudions le comportement asymptotique des solutions des équations d'Euler, incompressible en dimension deux, à l'extérieur d'un obstacle régulier quand l'obstacle devient de plus en plus fin, tendant vers une courbe. Nous étendons ici le résultat d'Iftimie, Lopes Filho et Nussenzveig Lopes [12], obtenu dans le cas où l'obstacle se contracte vers un point.

Inclus dans l'article *Two Dimensional Incompressible Ideal Flow Around a Thin Obstacle Tending to a Curve* qui va paraître dans les Annales de l'Institut Henri Poincaré (Analyse non linéaire), 2008.

### 3.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'étudier l'influence d'un obstacle fin sur un fluide idéal incompressible, en dimension deux. Plus précisément, nous considérons une famille d'obstacles  $\Omega_\varepsilon$  qui sont réguliers, ouverts, connexes et simplement connexes, tels qu'ils se contractent vers une courbe  $\Gamma$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , dans le sens donné dans la sous-partie 2.1.2.

Nous avons vu dans la partie 2.2 que pour la géométrie du domaine donnée  $\Pi_\varepsilon = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}$ , le champ de vitesse (de divergence nulle, tangent au bord et de limite nulle à l'infini) sur ce domaine est uniquement déterminé par les deux quantités suivantes : le tourbillon et la circulation de la vitesse autour de l'obstacle. Nous considérons comme données initiales un tourbillon initial  $\omega_0$  indépendant de  $\varepsilon$ , régulier, avec un support compact n'intersectant pas les obstacles, puis une circulation  $\gamma$  de la vitesse initiale le long du bord. D'après le travail de K. Kikuchi [15], nous savons qu'il existe une unique solution globale  $u^\varepsilon = u^\varepsilon(x, t)$  à l'équation d'Euler sur le domaine extérieur  $\Pi_\varepsilon$  associée à la donnée initiale décrite précédemment. L'objectif est de déterminer la limite de  $u^\varepsilon$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Nous obtiendrons un champ de vitesse limite de divergence nulle, tangent à la courbe, borné, sauf aux extrémités où il explose comme l'inverse de la racine carrée de la distance. Il admettra de plus un saut à travers de la courbe. Plus précisément, soit  $\Phi_\varepsilon$  la fonction troncature introduite dans la sous-partie 2.2.4 et soit  $\omega_\varepsilon = \text{rot } u^\varepsilon = \partial_1 u_2^\varepsilon - \partial_2 u_1^\varepsilon$  le tourbillon. Notre principal théorème peut être formulé comme ceci :

**Théorème 3.1.1.** *Il existe une sous-suite  $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$  telle que*

- (a)  $\Phi^\varepsilon u^\varepsilon \rightarrow u$  fortement dans  $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$  ;
- (b)  $\Phi^\varepsilon \omega^\varepsilon \rightarrow \omega$  faible \* dans  $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^4_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2))$  ;
- (c)  $u$  est donné en fonction de  $\omega$  et  $\gamma$  par une relation explicite (voir le théorème 3.3.6) ;
- (d)  $u$  et  $\omega$  sont des solutions faibles de  $\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0$  dans  $(0, \infty) \times \mathbb{R}^2$ .

Si nous calculons le rotationnel de  $u$ , nous trouvons  $\omega + g_\omega \delta_\Gamma$ , avec  $\delta_\Gamma$  le Dirac le long de la courbe  $\Gamma$  et  $g_\omega$  une densité donnée explicitement en fonction de  $\omega$  et  $\gamma$ . De plus, cette densité correspond au saut de la partie tangentielle de la vitesse à travers la courbe.

Nous obtenons donc que l'équation limite vérifiée par ce champ limite correspond à l'équation d'Euler dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ . Une conséquence de ce travail est donc l'existence d'une solution globale sur un tel domaine. Sur le plan entier, nous voyons apparaître le terme additionnel  $g_\omega$ . La présence de ce terme est indispensable afin que la vitesse soit tangente à la courbe, et qu'elle reste de circulation  $\gamma$  autour de  $\Gamma$ .

Ce chapitre se compose principalement en deux parties. Dans la prochaine partie, nous utilisons les formes explicites de la vitesse en fonction du tourbillon du chapitre 2 pour en déduire des estimations *a priori*. Ces dernières sont utilisées pour passer à la limite dans la partie 3.3. Nous discutons enfin dans la dernière partie le cas où nous supposons que la vitesse à l'infini est constante mais non nulle.

Rappelons avant de commencer qu'un fluide idéal incompressible est régi par les équations d'Euler :

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon = -\nabla p^\varepsilon & \text{dans } \Pi_\varepsilon \times (0, \infty) \\ \operatorname{div} u^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Pi_\varepsilon \times (0, \infty) \\ u^\varepsilon \cdot \hat{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_\varepsilon \times (0, \infty) \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |u^\varepsilon| = 0 & \text{pour } t \in [0, \infty) \\ u^\varepsilon(x, 0) = u_0^\varepsilon(x) & \text{dans } \Pi_\varepsilon \end{cases} \quad (3.1.1)$$

où  $p^\varepsilon = p^\varepsilon(x, t)$  est la pression. Pour les solutions de ce système, la circulation est une quantité conservée, ainsi que  $m \equiv \int \omega^\varepsilon = \int \omega_0$ . Ceci implique donc que dans la loi de Biot-Savart (2.2.7),  $\alpha$  est une constante (voir (2.2.8)), et vaut  $\gamma + m$ . Nous obtenons alors une version avec le tourbillon équivalente à la précédente :

$$\begin{cases} \partial_t \omega^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla \omega^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Pi_\varepsilon \times (0, \infty) \\ u^\varepsilon = K^\varepsilon[\omega^\varepsilon] + \alpha H^\varepsilon & \text{dans } \Pi_\varepsilon \times (0, \infty) \\ \omega^\varepsilon(x, 0) = \omega_0(x) & \text{dans } \Pi_\varepsilon \end{cases} \quad (3.1.2)$$

avec  $K^\varepsilon$  et  $H^\varepsilon$  définis dans (2.2.2) et (2.2.5). D'après les travaux de Kikuchi [15], pour tout  $\varepsilon > 0$ , le système admet une unique solution globale  $(u^\varepsilon, \omega^\varepsilon)$ .

## 3.2 Estimations *a priori*

Ces estimations sont importantes pour déterminer le comportement asymptotique des suites  $(u^\varepsilon)$  et  $(\omega^\varepsilon)$ . Sachant que l'équation (3.1.2) est en fait une équation de transport, nous en déduisons les estimations classiques pour le tourbillon en dimension deux :  $\|\omega^\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^p(\Pi_\varepsilon)} = \|\omega_0\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$  pour  $p \in [1, +\infty]$ . Nous rappelons que nous supposons dans cette thèse que  $\omega_0 \in L^1 \cap L^\infty$  est à support compact, n'intersectant pas la courbe  $\Gamma$ . Grâce à la proposition 2.1.9, nous pouvons choisir  $\varepsilon$  assez petit pour que le support de  $\omega_0$  n'intersecte pas  $\Pi_\varepsilon$ .



### 3.2.1 Estimation de la vitesse

Nous commençons par rappeler un résultat trouvé dans [10].

**Lemme 3.2.1.** *Soit  $a \in (0, 2)$ ,  $S \subset \mathbb{R}^2$  et  $h : S \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction de  $L^1(S) \cap L^\infty(S)$ . Alors*

$$\int_S \frac{h(y)}{|x-y|^a} dy \leq C \|h\|_{L^1(S)}^{1-a/2} \|h\|_{L^\infty(S)}^{a/2}.$$

Le but de cette sous-partie est de trouver une estimation sur le champ de vitesse grâce aux formules explicites (2.2.7), (2.2.2) et (2.2.5) :

$$u^\varepsilon(x, t) = \frac{1}{2\pi} DT_\varepsilon^t(x)(I_1 + I_2) + \alpha H^\varepsilon(x) \quad (3.2.1)$$

avec

$$I_1 = \int_{\Pi_\varepsilon} \frac{(T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y))^\perp}{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)|^2} \omega^\varepsilon(y, t) dy, \quad (3.2.2)$$

et

$$I_2 = - \int_{\Pi_\varepsilon} \frac{(T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)^*)^\perp}{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)^*|^2} \omega^\varepsilon(y, t) dy. \quad (3.2.3)$$

Nous commençons par estimer  $I_1$  et  $I_2$ .

**Lemme 3.2.2.** *Soient  $a \in (0, 2)$  et  $h : \Pi_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction de  $L^1(\Pi_\varepsilon) \cap L^\infty(\Pi_\varepsilon)$ . Nous notons*

$$I_{1,a} = \int_{\Pi_\varepsilon} \frac{|h(y)|}{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)|^a} dy$$

et

$$\tilde{I}_2 = \int_{\Pi_\varepsilon} \frac{|h(y)|}{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)^*|^a} dy.$$

Il existe alors une constante  $C > 0$  dépendant seulement de  $\Gamma$ , telle que

$$|I_{1,a}| \leq C \|h\|_{L^1}^{1-a/2} \|h\|_{L^\infty}^{a/2} \text{ et } |\tilde{I}_2| \leq C (\|h\|_{L^1}^{1/2} \|h\|_{L^\infty}^{1/2} + \|h\|_{L^1}).$$

*Remarque 3.2.3.* Il apparaîtra dans la preuve que les inégalités précédentes restent vraies avec  $T$  à la place de  $T_\varepsilon$ .

*Démonstration.* Nous commençons par majorer  $I_{1,a}$ . Posons  $J = J(\xi) \equiv |\det(DT_\varepsilon^{-1})(\xi)|$  et  $z = T_\varepsilon(x)$ . En changeant de variables  $\eta = T_\varepsilon(y)$ , nous obtenons

$$|I_{1,a}| \leq \int_{|\eta| \geq 1} \frac{1}{|z - \eta|^a} |h(T_\varepsilon^{-1}(\eta))| J(\eta) d\eta. \quad (3.2.4)$$

Nous introduisons ensuite  $f^\varepsilon(\eta) = |h(T_\varepsilon^{-1}(\eta))|J(\eta)\chi_{\{|\eta| \geq 1\}}$ , avec  $\chi_E$  la fonction caractéristique sur l'ensemble  $E$ . En revenant sur le changement de variables, nous avons

$$\|f^\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} = \|h\|_{L^1}.$$

Le second point de l'hypothèse 2.1.6 nous permet d'écrire

$$\|f^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq C\|h\|_{L^\infty}.$$

Nous appliquons alors le lemme précédent pour  $f$  et nous trouvons finalement

$$|I_{1,a}| \leq \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{|z - \eta|^a} f^\varepsilon(\eta) d\eta \leq C_1 \|f^\varepsilon\|_{L^1}^{1-a/2} \|f^\varepsilon\|_{L^\infty}^{a/2}. \quad (3.2.5)$$

Ceci correspond à l'inégalité cherchée pour  $I_{1,a}$ .

Estimons maintenant  $\tilde{I}_2$  :

$$|\tilde{I}_2| \leq \int_{\Pi_\varepsilon} \frac{1}{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)^*|} |h(y)| dy.$$

Comme précédemment nous utilisons les notations  $J$ ,  $z$  et le changement de variables  $\eta$  pour obtenir

$$|\tilde{I}_2| \leq \int_{|\eta| \geq 1} \frac{1}{|z - \eta^*|} |h(T_\varepsilon^{-1}(\eta))| J(\eta) d\eta. \quad (3.2.6)$$

Nous changeons à nouveau de variables en posant  $\theta = \eta^*$  :

$$\begin{aligned} |\tilde{I}_2| &\leq \int_{|\theta| \leq 1} \frac{1}{|z - \theta|} |h(T_\varepsilon^{-1}(\theta^*))| J(\theta^*) \frac{d\theta}{|\theta|^4} \\ &\leq \left( \int_{|\theta| \leq 1/2} + \int_{1/2 \leq |\theta| \leq 1} \right) \equiv I_{21} + I_{22}. \end{aligned}$$

Estimons tout d'abord  $I_{21}$ . Comme  $z = T_\varepsilon(x)$ , nous avons  $|z| \geq 1$ , et si  $|\theta| \leq 1/2$  alors  $|z - \theta| \geq 1/2$ . D'où

$$|I_{21}| \leq \int_{|\theta| \leq 1/2} 2|h(T_\varepsilon^{-1}(\theta^*))| J(\theta^*) \frac{d\theta}{|\theta|^4} \quad (3.2.7)$$

$$\leq 2 \int_{|\eta| \geq 2} |h(T_\varepsilon^{-1}(\eta))| J(\eta) d\eta \leq 2\|h\|_{L^1}. \quad (3.2.8)$$

Finissons la preuve en majorant  $I_{22}$ . Soit  $g^\varepsilon(\theta) = |h(T_\varepsilon^{-1}(\theta^*))| \frac{J(\theta^*)}{|\theta|^4}$ , alors

$$I_{22} = \int_{1/2 \leq |\theta| \leq 1} \frac{1}{|z - \theta|} g^\varepsilon(\theta) d\theta.$$

En revenant sur le changement de variable, nous déduisons que

$$\|g^\varepsilon\|_{L^1(1/2 \leq |\theta| \leq 1)} \leq \|h\|_{L^1}.$$

Nous pouvons de plus aisément remarquer que

$$\|g^\varepsilon\|_{L^\infty(1/2 \leq |\theta| \leq 1)} \leq C\|h\|_{L^\infty}.$$

En appliquant à nouveau le lemme 3.2.1, nous concluons que

$$\begin{aligned} |I_{22}| &= \int_{1/2 \leq |\theta| \leq 1} \frac{1}{|z - \theta|} g^\varepsilon(\theta) d\theta \\ &\leq C\|g^\varepsilon\|_{L^1(1/2 \leq |\theta| \leq 1)}^{1/2} \|g^\varepsilon\|_{L^\infty(1/2 \leq |\theta| \leq 1)}^{1/2} \leq C\|h\|_{L^1}^{1/2} \|h\|_{L^\infty}^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.2.9) \quad (3.2.10)$$

□

Puisque  $|T_\varepsilon(x)| \geq 1$ , nous déduisons de (2.2.5) que  $|H^\varepsilon(x)| \leq |DT_\varepsilon(x)|$ . De plus, en appliquant le lemme précédent avec  $a = 1$  et  $h = \omega^\varepsilon \in L^1 \cap L^\infty$ , nous obtenons

$$|I_1| \leq C\|\omega^\varepsilon\|_{L^1}^{1/2} \|\omega^\varepsilon\|_{L^\infty}^{1/2} \text{ et } |I_2| \leq C(\|\omega^\varepsilon\|_{L^1}^{1/2} \|\omega^\varepsilon\|_{L^\infty}^{1/2} + \|\omega^\varepsilon\|_{L^1}).$$

En se rappelant de la forme explicite (3.2.1), le théorème suivant est alors une conséquence de ces deux inégalités et du fait que  $\|\omega^\varepsilon\|_{L^p} = \|\omega_0\|_{L^p}$ ,  $\forall p$ .

**Théorème 3.2.4.** *Le champ de vitesse  $u^\varepsilon$  est borné dans  $L^\infty(\mathbb{R}^+, L_{\text{loc}}^2(\Pi_\varepsilon))$  indépendamment de  $\varepsilon$ . Plus précisément, il existe une constante  $C > 0$  dépendant seulement de  $\Gamma$  et des données initiales  $(\|\omega_0\|_{L^1}, \|\omega_0\|_{L^\infty}, \gamma)$  telle que*

$$\|u^\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^p(S)} \leq C\|DT_\varepsilon\|_{L^p(S)},$$

pour tout  $p \in [1, \infty]$  et pour tout sous-ensemble  $S$  de  $\Pi_\varepsilon$ .

Si nous voulons comparer les différentes vitesses et tourbillons, définis sur des domaines dépendants de  $\varepsilon$ , nous les étendons en les multipliant par la fonction troncature  $\Phi^\varepsilon$  définie dans la sous-partie 2.2.4. Les propriétés de  $\nabla \Phi^\varepsilon$  sont regroupées dans le lemme 2.2.1. Vérifions maintenant que les résultats ne sont pas affectés par notre choix de l'extension. En effet, si nous notons par  $Eu^\varepsilon$  et  $E\omega^\varepsilon$ , l'extension de  $u^\varepsilon$ , et respectivement de  $\omega^\varepsilon$ , par 0 à l'intérieur de l'obstacle, nous pouvons montrer que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Eu^\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi^\varepsilon u^\varepsilon$  et  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E\omega^\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi^\varepsilon \omega^\varepsilon$  dans  $D'(\mathbb{R}^2)$ . Pour cela, nous utilisons le théorème 3.2.4, la remarque 2.1.7 et le point (b) du lemme 2.2.1 pour affirmer que

$$\|\Phi^\varepsilon u^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{L^2(\Pi_\varepsilon)} \leq C\|DT_\varepsilon\|_{L^3(\text{supp}(\Phi^\varepsilon - 1))} |C\varepsilon|^{1/6}$$

et

$$\|\Phi^\varepsilon \omega^\varepsilon - \omega^\varepsilon\|_{L^p(\Pi_\varepsilon)} \leq C \|\omega_0\|_{L^\infty} |C\varepsilon|^{1/p}$$

pour tout  $p \in [1, \infty)$ .

Dans le cas où  $\Omega_\varepsilon$  se contracte homothétiquement vers un point (voir [12]), la mesure de Lebesgue du support de  $\nabla \Phi^\varepsilon$  est borné par  $C\varepsilon^2$ , ce qui implique que la norme  $L^1$  du gradient tend vers 0. Les auteurs utilisent de plus  $v^\varepsilon$  qui est une partie de la vitesse bornée indépendamment de  $\varepsilon$ . Ils peuvent alors montrer que les limites de  $v^\varepsilon \cdot \nabla \Phi^\varepsilon$  et  $v^\varepsilon \cdot \nabla^\perp \Phi^\varepsilon$  sont nulles, ce qui est nécessaire pour calculer le rotationnel et la divergence de  $v^\varepsilon \Phi^\varepsilon$ . Ils réalisent donc le passage à la limite en utilisant le lemme Div-Rot. Cet argument ne peut plus s'appliquer dans notre cas car la mesure de Lebesgue du support de  $\nabla \Phi^\varepsilon$  est trop grande, et nous n'avons de plus qu'une estimation de la vitesse  $L^p_{\text{loc}}$  pour  $p < 4$  au lieu de  $L^\infty$ . Cependant, dans notre cas, l'estimation a priori trouvée dans le théorème 3.2.4 concerne toute la vitesse  $u^\varepsilon$ . En utilisant d'autres arguments, nous trouvons avec le prochain lemme la limite de  $u^\varepsilon \cdot \nabla \Phi^\varepsilon$ .

**Lemme 3.2.5.** *Nous avons que  $u^\varepsilon \cdot \nabla \Phi^\varepsilon \rightarrow 0$  fortement dans  $L^1(\mathbb{R}^2)$  et uniformément en temps, quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .*

*Démonstration.* En utilisant les formes explicites (3.2.1), (3.2.2), (3.2.3) et (2.2.9), nous écrivons

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x) \cdot \nabla \Phi^\varepsilon(x) &= u^{\varepsilon\perp}(x) \cdot \nabla^\perp \Phi^\varepsilon(x) \\ &= -\frac{1}{2\pi\varepsilon} \Phi' \left( \frac{|T_\varepsilon(x)| - 1}{\varepsilon} \right) \\ &\quad \times \int_{\Pi_\varepsilon} \left( \frac{T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)}{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)|^2} - \frac{T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)^*}{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)^*|^2} \right) \omega^\varepsilon(y, t) dy \\ &\quad \times DT_\varepsilon(x) DT_\varepsilon^t(x) \frac{T_\varepsilon(x)^\perp}{|T_\varepsilon(x)|}. \end{aligned}$$

Or  $T_\varepsilon$  étant holomorphe,  $DT_\varepsilon$  est de la forme  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$  et nous pouvons vérifier que  $DT_\varepsilon(x) DT_\varepsilon^t(x) = (a^2 + b^2) Id = |\det(DT_\varepsilon)(x)| Id$ , puis que

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x) \cdot \nabla \Phi^\varepsilon(x) &= \frac{\Phi' \left( \frac{|T_\varepsilon(x)| - 1}{\varepsilon} \right) |\det(DT_\varepsilon)(x)|}{2\pi\varepsilon |T_\varepsilon(x)|} \\ &\quad \times \int_{\Pi_\varepsilon} \left( \frac{T_\varepsilon(y) \cdot T_\varepsilon(x)^\perp}{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)|^2} - \frac{T_\varepsilon(y)^* \cdot T_\varepsilon(x)^\perp}{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)^*|^2} \right) \omega^\varepsilon(y, t) dy. \end{aligned}$$

Nous prenons la norme  $L^1$ , puis nous changeons deux fois de variables  $\eta = T_\varepsilon(y)$  et  $z = T_\varepsilon(x)$ , afin d'obtenir

$$\begin{aligned} & \|u^\varepsilon \cdot \nabla \Phi^\varepsilon\|_{L^1} \\ &= \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{|z| \geq 1} \left| \Phi' \left( \frac{|z| - 1}{\varepsilon} \right) \right| \left| \int_{|\eta| \geq 1} \left( \frac{\eta \cdot \frac{z^\perp}{|z|}}{|z - \eta|^2} - \frac{\eta^* \cdot \frac{z^\perp}{|z|}}{|z - \eta^*|^2} \right) J(\eta) \omega^\varepsilon(T_\varepsilon^{-1}(\eta), t) d\eta \right| dz, \end{aligned}$$

où  $J(\eta) = |\det(DT_\varepsilon^{-1})(\eta)|$ . En utilisant le lemme 2.2.1, nous savons que  $\left\| \frac{1}{\varepsilon} \Phi' \left( \frac{|z| - 1}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^1} \leq C$ . Il est donc suffisant de montrer que

$$\left\| \int_{|\eta| \geq 1} \left( \frac{\eta \cdot z^\perp / |z|}{|z - \eta|^2} - \frac{\eta^* \cdot z^\perp / |z|}{|z - \eta^*|^2} \right) J(\eta) \omega^\varepsilon(T_\varepsilon^{-1}(\eta), t) d\eta \right\|_{L^\infty(1+\varepsilon \leq |z| \leq 1+2\varepsilon)} \rightarrow 0 \quad (3.2.11)$$

quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , uniformément en temps.

Soit

$$A = \frac{\eta \cdot z^\perp / |z|}{|z - \eta|^2} - \frac{\eta^* \cdot z^\perp / |z|}{|z - \eta^*|^2}.$$

Nous calculons

$$\begin{aligned} A &= \left( \frac{(|z|^2 - 2z \cdot \eta / |\eta|^2 + 1/|\eta|^2) - 1/|\eta|^2(|z|^2 - 2z \cdot \eta + |\eta|^2)}{|z - \eta|^2 |z - \eta^*|^2} \right) \eta \cdot \frac{z^\perp}{|z|} \\ &= \frac{(|z|^2 - 1)(1 - 1/|\eta|^2)}{|z - \eta|^2 |z - \eta^*|^2} \eta \cdot \frac{z^\perp}{|z|}. \end{aligned}$$

Nous utilisons que  $|z| \geq 1$ , pour écrire

$$|z - \eta^*| \geq 1 - \frac{1}{|\eta|}.$$

De plus,  $|\eta^*| \leq 1$  nous permet d'avoir

$$|z - \eta^*| \geq |z| - 1.$$

Nous pouvons alors majorer  $A$  par :

$$|A| \leq \frac{(|z| + 1)(1 + 1/|\eta|)(|z| - 1)^b}{|z - \eta|^2 |z - \eta^*|^b} \left| \eta \cdot \frac{z^\perp}{|z|} \right|$$

avec  $0 \leq b \leq 1$  qui sera choisi plus tard. Nous remarquons entre autre que  $\eta \cdot \frac{z^\perp}{|z|} = (\eta - z) \cdot \frac{z^\perp}{|z|}$ , ce qui nous donne par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left| \eta \cdot \frac{z^\perp}{|z|} \right| \leq |\eta - z|.$$

Nous utilisons désormais que  $|z| - 1 \leq 2\varepsilon$  afin de majorer (3.2.11) :

$$\left| \int_{|\eta| \geq 1} AJ(\eta) \omega^\varepsilon(T_\varepsilon^{-1}(\eta), t) d\eta \right| \leq (2 + 2\varepsilon) \cdot 2 \cdot (2\varepsilon)^b \int_{|\eta| \geq 1} \frac{J(\eta) |\omega^\varepsilon(T_\varepsilon^{-1}(\eta), t)|}{|z - \eta| |z - \eta^*|^b} d\eta.$$

En revenant à la preuve du lemme 3.2.2, le passage de (3.2.4) à (3.2.5) peut être ici répété pour  $p < 2$  (grâce au lemme 3.2.1) :

$$\left\| \frac{J(\eta)^{1/p} |\omega^\varepsilon(T_\varepsilon^{-1}(\eta), t)|^{1/p}}{|z - \eta|} \right\|_{L^p} = \left( \int_{|\eta| \geq 1} \frac{J(\eta) |\omega^\varepsilon(T_\varepsilon^{-1}(\eta), t)|}{|z - \eta|^p} d\eta \right)^{1/p} \leq C_p.$$

De même, en refaisant ici le passage de (3.2.6) à (3.2.8) et (3.2.10), nous obtenons pour  $bq = 1$  :

$$\left\| \frac{J(\eta)^{1/q} |\omega^\varepsilon(T_\varepsilon^{-1}(\eta), t)|^{1/q}}{|z - \eta^*|^b} \right\|_{L^q} = \left( \int_{|\eta| \geq 1} \frac{J(\eta) |\omega^\varepsilon(T_\varepsilon^{-1}(\eta), t)|}{|z - \eta^*|^b} d\eta \right)^{1/q} \leq \tilde{C}_q.$$

Nous choisissons alors  $b > 0$ ,  $1/p + 1/q = 1$ , puis nous concluons en utilisant l'inégalité d'Hölder. Par exemple, si nous fixons  $b = 1/4$ ,  $q = 4$  et  $p = 4/3$ , nous avons

$$\|u^\varepsilon \cdot \nabla \Phi^\varepsilon\|_{L^1} \leq C(2 + 2\varepsilon) \cdot 2 \cdot (2\varepsilon)^{1/4} C_{4/3} \tilde{C}_4$$

ce qui tend bien vers zéro quand  $\varepsilon$  tend vers zéro.  $\square$

Si cette preuve est très technique, l'idée est naturelle. Sur le bord, la vitesse  $u^\varepsilon$  est tangente à  $\Gamma_\varepsilon$ , alors que  $\nabla \Phi^\varepsilon$  est normale. Pour vérifier ceci, nous pouvons vérifier que  $A = 0$  quand  $x \in \Gamma_\varepsilon$  (c'est à dire quand  $|z| = |T_\varepsilon(x)| = 1$ ).

Juste avant de passer à la limite dans la partie suivante, nous allons déduire directement de l'EDP une estimation temporelle pour le tourbillon.

### 3.2.2 Estimation temporelle

Si nous fixons  $\mathbf{T} > 0$ , nous remarquons qu'il existe  $R_1 > 0$  indépendant de  $\varepsilon$  tel que le support de  $\omega^\varepsilon(\cdot, t)$  est contenu dans  $B(0; R_1)$  pour tout  $0 \leq t \leq \mathbf{T}$ . Pour voir cela, posons  $R_0$  tel que  $B(0; R_0)$  contienne le support de  $\omega_0$ . L'équation (3.1.2) nous assure que  $\omega^\varepsilon$  est transporté par le champ de vitesse  $u^\varepsilon$  et que la trajectoire des particules vérifie

$$\partial_t X = u^\varepsilon(X, t).$$

De plus, le théorème 3.2.4 affirme que  $|u^\varepsilon(x)| \leq C|DT_\varepsilon(x)|$  et le point (iv) de l'hypothèse 2.1.6 affirme qu'il existe  $R > 0$  et  $C_1 > 0$  tels que  $DT_\varepsilon$  est

borné par  $C_1|X|$  en dehors de  $B(0, R)$ . Si une particule rentre dans la région  $B(0, \max(R_0, R))^c$ , alors la vitesse est majorée par  $CC_1|X|$ , et nous obtenons l'inégalité

$$\partial_t|X|^2 = X \cdot \partial_t X \leq CC_1|X|^2,$$

dans une telle région. En appliquant le lemme de Gronwall, nous obtenons que les trajectoires sont bornées indépendamment de  $\varepsilon$  (jusqu'au temps  $\mathbf{T}$ ).

**Lemme 3.2.6.** *Il existe une constante  $C$ , ne dépendant pas de  $t \in [0, \mathbf{T}]$  et  $\varepsilon$  telle que*

$$\|\Phi^\varepsilon \partial_t \omega^\varepsilon\|_{H^{-2}} \leq C.$$

*Démonstration.* Nous écrivons l'égalité vérifiée par  $\Phi^\varepsilon \omega^\varepsilon$  :

$$\begin{aligned} \Phi^\varepsilon \partial_t \omega^\varepsilon &= -\Phi^\varepsilon u^\varepsilon \cdot \nabla \omega^\varepsilon \\ &= -\operatorname{div}(\Phi^\varepsilon u^\varepsilon \omega^\varepsilon) + \omega^\varepsilon u^\varepsilon \cdot \nabla \Phi^\varepsilon \end{aligned}$$

ce qui est borné dans  $H^{-2}$  pour la raison suivante. Tout d'abord, nous savons que  $\Phi^\varepsilon$  et  $\omega^\varepsilon$  sont uniformément bornés,  $u^\varepsilon$  est borné dans  $L^2(B(0, R_1))$  par le théorème 3.2.4, la remarque 2.1.7 et le commentaire précédent. De plus  $\nabla \Phi^\varepsilon \cdot u^\varepsilon \rightarrow 0$  dans  $L^1$  d'après le lemme précédent. Nous concluons finalement en se rappelant que  $L^1$  et  $H^{-1}$  s'injectent dans  $H^{-2}$ .  $\square$

### 3.3 Passage à la limite

#### 3.3.1 Compacité forte de la vitesse

Fixons  $\mathbf{T} > 0$ . Nous avons besoin de plusieurs lemmes pour passer à la limite forte dans  $L^2_{\text{loc}}([0, \mathbf{T}] \times \mathbb{R}^2)$  pour la suite  $\Phi^\varepsilon u^\varepsilon$ .

Comme dans la sous-partie précédente, nous posons  $R_1 > 0$  tel que le support de  $\omega^\varepsilon(\cdot, t)$  soit contenu dans  $B(0; R_1)$  pour tout  $0 \leq t \leq \mathbf{T}$  et  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ .

**Lemme 3.3.1.** *Pour tout  $x \in \Pi$  fixé, il existe  $\varepsilon_x > 0$  tel que  $x \in \Pi_\varepsilon$  pour tout  $\varepsilon \leq \varepsilon_x$ . Les deux fonctions suivantes*

$$\begin{aligned} f_{x,\varepsilon}(y) &= \frac{T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)}{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)|^2} \\ g_{x,\varepsilon}(y) &= \frac{T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)^*}{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)^*|^2} \end{aligned}$$

*sont alors bornées dans  $L^{4/3}(B(0, R_1) \cap \Pi_\varepsilon)$  indépendamment de  $\varepsilon \leq \varepsilon_x$  (mais non nécessairement indépendamment de  $x$ ).*

De plus,

$$f_x(y) = \frac{T(x) - T(y)}{|T(x) - T(y)|^2}$$

et

$$g_x(y) = \frac{T(x) - T(y)^*}{|T(x) - T(y)^*|^2}$$

sont bornées dans  $L^{4/3}(B(0, R_1) \cap \Pi)$ .

*Démonstration.* En se rappelant des propriétés de  $T$  et que  $T_\varepsilon \rightarrow T$  uniformément dans  $B(0, R_1)$ , nous savons que  $T_\varepsilon(B(0, R_1)) \subset B(0, \tilde{R})$ , pour  $\tilde{R} > 0$  indépendant de  $\varepsilon$ .

Pour borner  $f_{x,\varepsilon}$ , nous changeons de variables  $\eta = T_\varepsilon(y)$  et nous posons  $z = T_\varepsilon(x)$  :

$$\begin{aligned} \int_{B(0, R_1) \cap \Pi_\varepsilon} \frac{1}{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)|^{4/3}} dy &\leq \int_{1 \leq |\eta| \leq \tilde{R}} \frac{|\det(DT_\varepsilon^{-1})|(\eta)}{|z - \eta|^{4/3}} d\eta \\ &\leq 2\pi C \int_0^{|z| + \tilde{R}} \frac{1}{r^{1/3}} dr \\ &\leq C_1(x). \end{aligned}$$

Pour la seconde fonction, nous commençons de la même manière, puis nous changeons à nouveau de variables avec  $\theta = \eta^*$  :

$$\begin{aligned} \int_{B(0, R_1) \cap \Pi_\varepsilon} \frac{1}{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)^*|^{4/3}} dy &\leq \int_{1 \leq |\eta| \leq \tilde{R}} \frac{|\det(DT_\varepsilon^{-1})|(\eta)}{|z - \eta^*|^{4/3}} d\eta \\ &\leq C \int_{1/\tilde{R} \leq |\theta| \leq 1} \frac{1}{|z - \theta|^{4/3}} \frac{d\theta}{|\theta|^4} \\ &\leq \tilde{C} \int_{|\theta| \leq 1} \frac{1}{|z - \theta|^{4/3}} d\theta \\ &\leq C_2(x) \end{aligned}$$

avec  $C_2$  ne dépendant pas de  $\varepsilon$ .

En remplaçant  $T$  par  $T_\varepsilon$ , nous obtenons les bornes pour  $f_x$  et  $g_x$ .  $\square$

Considérons maintenant la limite de  $\Phi^\varepsilon \omega^\varepsilon$ . Comme  $\Phi^\varepsilon \omega^\varepsilon \in L^\infty([0, \infty), L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2))$  et que  $\Phi^\varepsilon \partial_t \omega^\varepsilon \in L^\infty_{\text{loc}}([0, \infty), H^{-2}(\mathbb{R}^2))$ , nous pouvons extraire une sous-suite telle que  $\Phi^\varepsilon \omega^\varepsilon \rightarrow \omega$  faible- $*$  dans  $L^\infty([0, \infty), L^4(\mathbb{R}^2))$  avec  $\omega \in L^\infty([0, \infty), L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2))$  et  $\partial_t \omega \in L^\infty_{\text{loc}}([0, \infty), H^{-2}(\mathbb{R}^2))$ . Nous voulons de plus que  $\Phi^\varepsilon \omega^\varepsilon(\cdot, t) \rightarrow \omega(\cdot, t)$  faible  $L^4$  pour tout  $t$ . Comme  $\|\Phi^\varepsilon \omega^\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^4(\mathbb{R}^2)} \leq \|\omega_0\|_{L^4} < \infty$ , et grâce au théorème d'Alaoglu, nous pouvons extraire pour



tout  $t$  une sous-suite qui vérifie  $\Phi^\varepsilon \omega^\varepsilon(\cdot, t) \rightarrow \omega(\cdot, t)$  faible  $L^4$ . Cependant, cette sous-suite dépend du temps, ce qui ne correspond pas à ce que nous cherchons. La prochaine proposition établit l'existence de cette sous-suite commune pour tout  $t$ . Remarquons avant que  $\omega(t)$  est défini pour tout  $t \geq 0$ . En effet,  $\partial_t \omega \in L_{\text{loc}}^\infty([0, \infty), H^{-2}(\mathbb{R}^2))$ , d'où  $\omega \in C^0([0, \infty), H^{-2}(\mathbb{R}^2))$ . De plus, puisque  $\omega \in L^\infty([0, \infty), L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2))$  nous avons aussi que  $\omega(t) \in L^p(\mathbb{R}^2)$  pour tout  $t \geq 0$  et  $\sup_{t \geq 0} \|\omega(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} < \infty$  pour tout  $p > 1$ .

**Proposition 3.3.2.** *Il existe une sous-suite de  $\Phi^\varepsilon \omega^\varepsilon$  (notée encore  $\Phi^\varepsilon \omega^\varepsilon$ ) telle que  $\Phi^\varepsilon \omega^\varepsilon(\cdot, t) \rightarrow \omega(\cdot, t)$  faible  $L^4(\mathbb{R}^2)$  pour tout  $t$ .*

*Démonstration.* Comme  $\mathbb{Q}$  est dénombrable, par extraction diagonale nous choisissons une sous-suite commune à tous les temps rationnels. Nous allons alors montrer que cette sous-suite converge pour tout  $t$ .

Soit  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$  et

$$f_\varepsilon(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\Phi^\varepsilon \omega^\varepsilon - \omega) dx.$$

Alors  $f_\varepsilon \rightarrow 0$  pour tout  $t \in \mathbb{Q}$ . De plus

$$f'_\varepsilon(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\Phi^\varepsilon \partial_t \omega^\varepsilon - \partial_t \omega) dx.$$

En utilisant l'estimation temporelle (lemme 3.2.6) et le fait que  $\varphi \in H^2$ , alors nous avons que  $\{f_\varepsilon\}$  est équicontinue. Or, une famille équicontinue qui tend vers 0 sur un ensemble dense, tend vers 0 pour tout  $t$ .

Pour finir, soit  $\varphi \in L^{4/3}(\mathbb{R}^2)$ . L'ensemble  $C_c^\infty$  étant dense dans  $L^{4/3}$ , il existe une suite  $\varphi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$  qui converge vers  $\varphi$  dans  $L^{4/3}$ . Nous introduisons  $f_{n,\varepsilon}$  de la même manière que  $f_\varepsilon$ , en remplaçant  $\varphi$  par  $\varphi_n$ . Pour  $t$  fixé, la première partie de cette preuve affirme que

$$\text{pour tout } n, f_{n,\varepsilon} \rightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.3.1)$$

De plus

$$\begin{aligned} f_\varepsilon - f_{n,\varepsilon} &= \int_{\mathbb{R}^2} (\varphi - \varphi_n)(\Phi^\varepsilon \omega^\varepsilon - \omega) dx \\ |f_\varepsilon - f_{n,\varepsilon}| &\leq (\|\omega_0\|_{L^4} + \sup_{t \geq 0} \|\omega(t)\|_{L^4}) \|\varphi - \varphi_n\|_{L^{4/3}}. \end{aligned}$$

Par conséquent,  $f_\varepsilon - f_{n,\varepsilon}$  tend vers 0 uniformément en  $\varepsilon$ , ce qui permet avec (3.3.1) de conclure que  $f_\varepsilon \rightarrow 0$ . Ceci termine la démonstration.  $\square$

**Lemme 3.3.3.** *Les deux fonctions suivantes :*

$$f_\varepsilon(t, x) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(T(x) - T(y))^\perp}{|T(x) - T(y)|^2} (\Phi^\varepsilon(y) \omega^\varepsilon(t, y) - \omega(t, y)) dy$$

et

$$g_\varepsilon(t, x) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(T(x) - T(y)^*)^\perp}{|T(x) - T(y)^*|^2} (\Phi^\varepsilon(y) \omega^\varepsilon(t, y) - \omega(t, y)) dy$$

tendent vers 0 dans  $L^2([0, \mathbf{T}], L_{\text{loc}}^6(\mathbb{R}^2))$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

*Démonstration.* Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^2$ . Dans un premier temps, nous fixons  $t \in [0, \mathbf{T}]$  et nous montrons que la norme  $L^6(K)$  de  $f_\varepsilon$  tend vers 0.

Pour tout  $x \in K \setminus \Gamma$ ,

$$f_\varepsilon(t, x) = \int_{\mathbb{R}^2} f_x(y)^\perp (\Phi^\varepsilon(y) \omega^\varepsilon(t, y) - \omega(t, y)) dy,$$

avec  $f_x$  donné dans le lemme 3.3.1. Ce dernier lemme affirme d'ailleurs que  $f_x$  est borné dans  $L^{4/3}$  et comme  $\Phi^\varepsilon \omega^\varepsilon \rightarrow \omega$  faible  $L^4$ , nous avons que pour  $x$  fixé,

$$f_\varepsilon(t, x) \rightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Nous appliquons alors le lemme 3.2.2 (majoration de  $I_{1,a}$ ) avec

$$h(t, y) = \Phi^\varepsilon(y) \omega^\varepsilon(t, y) - \omega(t, y)$$

afin d'obtenir une borne pour  $f_\varepsilon$  indépendante de  $x$ ,  $t$  et  $\varepsilon$ .

Nous avons donc  $f_\varepsilon^6 \rightarrow 0$  presque partout quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , et que  $|f_\varepsilon^6|$  est uniformément borné. Nous pouvons donc appliquer le théorème de convergence dominée pour conclure que pour tout  $t$  et  $K$  compact

$$\int_K |f_\varepsilon(t, x)|^6 dx \rightarrow 0.$$

Nous faisons maintenant varier  $t$  et nous appliquons une nouvelle fois le théorème de convergence dominée pour obtenir le résultat concernant  $f_\varepsilon$ .

En utilisant cette fois ci la majoration de  $\tilde{I}_2$  du lemme 3.2.2, nous procédons de la même manière pour  $g_\varepsilon$ .  $\square$

Nous avons encore besoin de deux derniers lemmes, qui peuvent être interprétés comme une conséquence de la convergence de  $T_\varepsilon$  vers  $T$  (hypothèse 2.1.6).

**Lemme 3.3.4.** *Pour tout  $x \in \Pi$ ,*

$$\frac{(T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)^*)^\perp}{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)^*|^2} - \frac{(T(x) - T(y)^*)^\perp}{|T(x) - T(y)^*|^2} \rightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0$$

*dans  $L^{4/3}(B(0, R_1) \cap \Pi_\varepsilon)$  (où la norme est prise par rapport à  $y$ ).*

*Démonstration.* Soit  $x$  fixé. En utilisant la relation (2.2.3) nous avons

$$\int_{B(0, R_1) \cap \Pi_\varepsilon} \left( \frac{|(T(x) - T_\varepsilon(x)) - (T(y)^* - T_\varepsilon(y)^*)|}{|T(x) - T(y)^*||T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)^*|} \right)^{4/3} dy \equiv \int_{B(0, R_1) \cap \Pi_\varepsilon} h_{x, \varepsilon}(y) dy.$$

D'après la remarque 2.1.7, nous savons que  $h_{x, \varepsilon}(y) \rightarrow 0$  ponctuellement quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Si  $x \notin \Gamma$  alors  $|T(x)| > 1$ , et comme  $|T_\varepsilon(x)| \rightarrow |T(x)| \neq 1$  nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} |T(x) - T(y)^*| &\geq |T(x)| - 1 > 0 \\ |T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)^*| &\geq |T_\varepsilon(x)| - 1 \geq 1/2(|T(x)| - 1) > 0, \end{aligned}$$

pour  $\varepsilon$  assez petit (dépendant de  $x$ ). Par conséquent  $h_{x, \varepsilon}$  peut être borné par une constante indépendante de  $y$  et  $\varepsilon$ , ce qui nous permet d'appliquer le théorème de convergence dominée pour affirmer que  $\int_{B(0, R_1) \cap \Pi_\varepsilon} h_{x, \varepsilon}(y) dy \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .  $\square$

**Lemme 3.3.5.** *Nous avons que*

$$\Phi^\varepsilon(x) \int_{\mathbb{R}^2} \left( \frac{(T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y))^\perp}{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)|^2} - \frac{(T(x) - T(y))^\perp}{|T(x) - T(y)|^2} \right) \Phi^\varepsilon(y) \omega^\varepsilon(y) dy \rightarrow 0$$

*dans  $L^\infty_{\text{loc}}([0, \infty) \times \mathbb{R}^2)$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .*

*Démonstration.* Soit  $x \in B(0, R)$  et  $y \in \text{supp } \omega^\varepsilon$  fixés. En utilisant à nouveau (2.2.3) nous pouvons introduire

$$\tilde{h}_{x, \varepsilon} \equiv \frac{|(T_\varepsilon(x) - T(x)) - (T_\varepsilon(y) - T(y))|}{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)||T(x) - T(y)|}$$

et le borner par

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{x, \varepsilon} &\leq \sqrt{2 \sup_{B(0, R_2) \cap \Pi_\varepsilon} (|T_\varepsilon - T|)} \\ &\quad \times \left( \frac{1}{\sqrt{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)||T(x) - T(y)|}} + \frac{1}{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)|\sqrt{|T(x) - T(y)|}} \right) \end{aligned}$$

où  $R_2 = \max(R, R_1)$ .

En utilisant le lemme 3.2.2 avec  $a = 5/4$  et  $a = 5/3$  nous concluons grâce à l'inégalité d'Hölder que :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{h}_{x,\varepsilon}(y) \Phi^\varepsilon(y) |\omega^\varepsilon(y)| dy &\leq \sqrt{2 \sup_{B(0,R_2) \cap \Pi_\varepsilon} (|T_\varepsilon - T|)} \\
&\times \left( \left\| \frac{(\omega^\varepsilon)^{2/5}}{\sqrt{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)|}} \right\|_{L^{5/2}} \left\| \frac{(\omega^\varepsilon)^{3/5}}{|T(x) - T(y)|} \right\|_{L^{5/3}} \right. \\
&\quad \left. + \left\| \frac{(\omega^\varepsilon)^{3/5}}{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)|} \right\|_{L^{5/3}} \left\| \frac{(\omega^\varepsilon)^{2/5}}{\sqrt{|T(x) - T(y)|}} \right\|_{L^{5/2}} \right) \\
&\leq C \sqrt{\sup_{B(0,R_2) \cap \Pi_\varepsilon} (|T_\varepsilon - T|)}.
\end{aligned}$$

La convergence uniforme de  $T_\varepsilon$  (remarque 2.1.7) nous permet alors de conclure.  $\square$

**Théorème 3.3.6.** *Nous avons  $\Phi^\varepsilon u^\varepsilon \rightarrow u$  fortement dans  $L^2_{\text{loc}}([0, \infty) \times \mathbb{R}^2)$ , avec*

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} DT^t(x) \int_{\mathbb{R}^2} \left( \frac{(T(x) - T(y))^\perp}{|T(x) - T(y)|^2} - \frac{(T(x) - T(y)^*)^\perp}{|T(x) - T(y)^*|^2} \right) \omega(y, t) dy + \alpha H(x). \quad (3.3.2)$$

*Démonstration.* Nous rappelons la forme explicite de  $\Phi^\varepsilon u^\varepsilon$  :

$$\begin{aligned}
\Phi^\varepsilon u^\varepsilon &= \frac{1}{2\pi} \Phi^\varepsilon(x) DT_\varepsilon^t(x) \int_{\Pi_\varepsilon} \left( \frac{(T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y))^\perp}{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)|^2} - \frac{(T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)^*)^\perp}{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)^*|^2} \right) \omega^\varepsilon(y, t) dy \\
&\quad + \alpha \Phi^\varepsilon(x) H^\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

Ensuite nous décomposons :

$$\begin{aligned}
(\Phi^\varepsilon u^\varepsilon - u)(x) &= \frac{1}{2\pi} (DT_\varepsilon^t(x) - DT^t(x)) \Phi^\varepsilon(x) \int_{\Pi_\varepsilon} \left( \frac{(T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y))^\perp}{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)|^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)^*)^\perp}{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)^*|^2} \right) \omega^\varepsilon(y) dy \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} DT^t(x) \Phi^\varepsilon(x) \int_{\Pi_\varepsilon} \left( \frac{(T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y))^\perp}{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)|^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)^*)^\perp}{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)^*|^2} \right) \omega^\varepsilon(y) (1 - \Phi^\varepsilon(y)) dy \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} DT^t(x) \Phi^\varepsilon(x) \int_{\mathbb{R}^2} \left( \frac{(T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y))^\perp}{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)|^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(T(x) - T(y))^\perp}{|T(x) - T(y)|^2} \right) \Phi^\varepsilon(y) \omega^\varepsilon(y) dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\pi} DT^t(x)(\Phi^\varepsilon(x) - 1) \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(T(x) - T(y))^\perp}{|T(x) - T(y)|^2} \Phi^\varepsilon(y) \omega^\varepsilon(y) dy \\
& + \frac{1}{2\pi} DT^t(x) \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(T(x) - T(y))^\perp}{|T(x) - T(y)|^2} (\Phi^\varepsilon(y) \omega^\varepsilon(y) - \omega(y)) dy \\
& - \frac{1}{2\pi} DT^t(x) \Phi^\varepsilon(x) \int_{\mathbb{R}^2} \left( \frac{(T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y))^*{}^\perp}{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)|^2} \right. \\
& \quad \left. - \frac{(T(x) - T(y))^*{}^\perp}{|T(x) - T(y)|^2} \right) \Phi^\varepsilon(y) \omega^\varepsilon(y) dy \\
& - \frac{1}{2\pi} DT^t(x)(\Phi^\varepsilon(x) - 1) \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(T(x) - T(y))^*{}^\perp}{|T(x) - T(y)|^2} \Phi^\varepsilon(y) \omega^\varepsilon(y) dy \\
& - \frac{1}{2\pi} DT^t(x) \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(T(x) - T(y))^*{}^\perp}{|T(x) - T(y)|^2} (\Phi^\varepsilon(y) \omega^\varepsilon(y) - \omega(y)) dy \\
& + \alpha \frac{1}{2\pi} \left( \Phi^\varepsilon(x) DT_\varepsilon^t(x) \frac{T_\varepsilon(x)^\perp}{|T_\varepsilon(x)|^2} - DT^t(x) \frac{T(x)^\perp}{|T(x)|^2} \right) \\
& \equiv J_1 + \dots + J_9.
\end{aligned}$$

Pour chaque  $J_i$  nous utiliserons le fait que  $DT$  est borné dans  $L_{\text{loc}}^3$  (voir la proposition 2.1.2). Nous utiliserons les majorations des intégrales  $I_1$  et  $I_2$  indépendamment de  $x$ ,  $\varepsilon$ ,  $t$  (voir le lemme 3.2.2).

Pour  $J_4$  et  $J_7$ , nous remarquons que  $(\Phi^\varepsilon(x) - 1) \rightarrow 0$  dans  $L^6$ ,  $DT$  étant borné dans  $L_{\text{loc}}^3$  tandis que l'intégrale est bornée indépendamment de  $x$ ,  $\varepsilon$  et  $t$  (voir la remarque 3.2.3), ce qui est suffisant pour conclure que  $J_4$  et  $J_7$  convergent vers zéro dans  $L_{\text{loc}}^2([0, \infty) \times \mathbb{R}^2)$ .

Un argument similaire fonctionne pour  $J_1$ , car  $DT_\varepsilon \rightarrow DT$  dans  $L_{\text{loc}}^3$  par l'hypothèse 2.1.6.

En ce qui concerne  $J_2$ , le lemme 3.3.1 affirme que pour  $x$  fixé, les fractions sont bornées dans  $L^{4/3}(B(0, R_1))$  indépendamment de  $\varepsilon$ . De plus  $\omega^\varepsilon$  est borné indépendamment de  $t$ ,  $\varepsilon$  et  $1 - \Phi^\varepsilon(y) \rightarrow 0$  dans  $L^4$ . Nous avons donc, pour  $x \notin \Gamma$  fixé, que l'intégrale tend simplement vers 0. Or l'intégrale est bornée (voir le lemme 3.2.2) et en utilisant le théorème de convergence dominée, nous observons qu'elle tend vers 0 dans  $L_{\text{loc}}^6$ . Nous avons alors la convergence de  $J_2$  vers zéro car  $DT$  est borné  $L_{\text{loc}}^3$ .

La convergence de  $J_3$  vers 0 découle directement du lemme 3.3.5. Ensuite, comme  $DT$  appartient à  $L_{\text{loc}}^3(\mathbb{R}^2)$  et grâce au lemme 3.3.3, nous savons que les intégrales dans  $J_5$  et  $J_8$  tendent vers zéro dans  $L_{\text{loc}}^2([0, \infty), L_{\text{loc}}^6(\mathbb{R}^2))$ . Par conséquent  $J_5$  et  $J_8$  tendent vers zéro dans  $L_{\text{loc}}^2$ .

Traisons maintenant  $J_6$ . En appliquant le lemme 3.3.4 et en raisonnant comme nous l'avons fait pour  $J_2$  : pour  $x$  et  $t$  fixés, l'intégrale tend simplement vers 0 car  $\omega^\varepsilon$  est borné dans  $L^4$  indépendamment de  $t$ . De plus, la

borne uniforme du lemme 3.2.2 nous permet d'appliquer deux fois le théorème de convergence dominée pour obtenir que l'intégrale converge vers 0 dans  $L^2_{\text{loc}}([0, \infty), L^6_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2))$ . En utilisant une nouvelle fois que  $DT$  appartient à  $L^3_{\text{loc}}$  nous obtenons le résultat désiré pour  $J_6$ .

La convergence de  $J_9$  peut être faite plus facilement car  $1/|T| \leq 1$ . En effet, nous pouvons le décomposer

$$\begin{aligned} J_9 &= \frac{\alpha}{2\pi} (DT_\varepsilon^t(x) - DT^t(x)) \Phi^\varepsilon(x) \frac{T_\varepsilon(x)^\perp}{|T_\varepsilon(x)|^2} \\ &\quad + \frac{\alpha}{2\pi} \Phi^\varepsilon(x) DT^t(x) \left( \frac{T_\varepsilon(x)^\perp}{|T_\varepsilon(x)|^2} - \frac{T(x)^\perp}{|T(x)|^2} \right) \\ &\quad + \frac{\alpha}{2\pi} (\Phi^\varepsilon(x) - 1) DT^t(x) \frac{T(x)^\perp}{|T(x)|^2}, \end{aligned}$$

et la convergence vers zéro de  $J_9$  est alors une conséquence directe du point (iii) de l'hypothèse 2.1.6 et de la remarque 2.1.7.  $\square$

Le théorème précédent donne une formule explicite de la vitesse en fonction du tourbillon limite. Nous en déduisons alors quelques propriétés sur cette vitesse limite  $u$ .

**Proposition 3.3.7.** *Soit  $u$  donné par le théorème 3.3.6. Pour  $t$  fixé, ce champ de vitesse*

- i) est continu sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ .*
- ii) est continu jusqu'au bord  $\Gamma \setminus \{-1; 1\}$ , avec des valeurs différentes de chaque côté de  $\Gamma$ .*
- iii) explose aux extrémités de la courbe comme  $C/\sqrt{|x-1||x+1|}$ , ce qui appartient à  $L^p_{\text{loc}}$  pour  $p < 4$ .*
- iv) est tangent à la courbe.*

*Démonstration.* Pour montrer cela, nous allons démontrer que

$$A(x) \equiv \int_{\mathbb{R}^2} \frac{T(x) - T(y)}{|T(x) - T(y)|^2} \omega(y) dy \text{ et } B(x) \equiv \int_{\mathbb{R}^2} \frac{T(x) - T(y)^*}{|T(x) - T(y)^*|^2} \omega(y) dy$$

sont continus sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  quand  $\omega \in L^1 \cap L^\infty$ . Comme dans la preuve du lemme 3.2.2, nous changeons de variables et nous introduisons  $f(\eta, t) = \omega(T^{-1}(\eta), t) J(\eta) \chi_{\{|\eta| \geq 1\}}$  puis  $z = T(x)$ . Nous avons alors  $\tilde{A}(z) \equiv A(x) = \int_{|\eta| \geq 1} \frac{z - \eta}{|z - \eta|^2} f(\eta, t) d\eta$  qui est continu pour  $f \in L^1 \cap L^\infty$ . De la même manière que nous avons majoré  $I_2$  dans la preuve du lemme 3.2.2, nous écrivons

$$B(x) = \int_{|\eta| \geq 2} \frac{z - \eta^*}{|z - \eta^*|^2} f(\eta, t) d\eta + \int_{1/2 \leq |\theta| \leq 1} \frac{z - \theta}{|z - \theta|^2} g(\theta, t) d\theta \equiv B_1(z) + B_2(z),$$

avec  $g(\theta, t) = \omega(T^{-1}(\theta^*), t)J(\theta^*)/|\theta|^4$ . Comme pour  $A$ , nous observons que  $B_2$  est continu. Pour  $B_1$ , nous prenons une suite  $f_n \in C_c^\infty$  telle que  $f_n \rightarrow f(\cdot, t)$  fortement dans  $L^1$  et nous remarquons que  $B_{1,n} \equiv \int_{|\eta| \geq 2} \frac{z-\eta^*}{|z-\eta^*|^2} f_n(\eta, t) d\eta$  est continu. Comme  $|z - \eta^*| \geq 1/2$ , et après avoir vu que  $\|B_n - B_1\|_{L^\infty} \leq 2\|f_n - f\|_{L^1}$ , nous pouvons conclure que  $B_1$  est continu.

De plus,  $\tilde{A}$ ,  $B_1$  et  $B_2$  sont continus jusqu'au bord. Comme  $A(x) = \tilde{A}(T(x))$  et  $B(x) = B_1(T(x)) + B_2(T(x))$ , avec  $T$  continu jusqu'à  $\Gamma \setminus \{-1; 1\}$ , avec des valeurs différentes de chaque côté de  $\Gamma$  (voir la proposition 2.1.2), nous obtenons i) et ii).

L'explosion aux extrémités est une conséquence de l'expression de  $DT$  (voir (2.1.1)), et du fait que  $A(x)$  et  $B(x)$  sont bornés d'après le lemme 3.2.2.

Enfin, pour montrer que la vitesse est tangente à la courbe, nous réalisons un calcul similaire, mais simplifié, à celui fait dans la preuve du lemme 3.2.5. En effet, comme  $|T(x)| = 1$  sur la courbe  $\Gamma$ ,  $\nabla|T(x)|$  est orthogonal à la courbe. D'après la proposition 2.1.2,  $\nabla|T(x)|$  est continu jusqu'à la courbe  $\Gamma$  avec des valeurs différentes de chaque côté. Soit  $x \in \Gamma \setminus \{-1; 1\}$ , alors pour une suite  $x_n \in \Pi$  qui tend vers  $x$ , nous pouvons reprendre le calcul fait au début de la preuve du lemme 3.2.5, pour avoir :

$$\begin{aligned} u(x_n) \cdot \nabla|T(x_n)| &= u(x_n)^\perp \cdot \nabla^\perp|T(x_n)| \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \left( \frac{T(x_n) - T(y)}{|T(x_n) - T(y)|^2} - \frac{T(x_n) - T(y)^*}{|T(x_n) - T(y)^*|^2} \right) \omega(y, t) dy \\ &\quad \times DT(x_n)DT^t(x_n) \frac{T(x_n)^\perp}{|T(x_n)|} + \alpha \frac{\nabla|T(x_n)|}{|T(x_n)|} \cdot \nabla^\perp|T(x_n)| \\ &= \frac{1}{2\pi|T(x_n)|} \det(DT)(x_n) \int_{\mathbb{R}^2} A_n(y) \omega(y, t) dy \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} A_n(y) &= \frac{T(y) \cdot T(x_n)^\perp}{|T(x_n) - T(y)|^2} - \frac{T(y)^* \cdot T(x_n)^\perp}{|T(x_n) - T(y)^*|^2} \\ &= \frac{|T(x_n) - T(y)^*|^2 - |T(x_n) - T(y)|^2/|T(y)|^2}{|T(x_n) - T(y)|^2|T(x_n) - T(y)^*|^2} T(y) \cdot T(x_n)^\perp \\ &= \frac{(1 - 1/|T(y)|^2)(|T(x_n)|^2 - 1)}{|T(x_n) - T(y)|^2|T(x_n) - T(y)^*|^2} T(y) \cdot T(x_n)^\perp. \end{aligned}$$

Si  $x_n$  tend vers  $x$  sur un côté de la courbe, alors  $|T(x_n)| \rightarrow 1$  et  $A_n(y) \rightarrow 0$ . D'où  $A_n \omega(\cdot, t)$  tend simplement vers zéro, et comme l'intégrale est bornée d'après la remarque 3.2.3, nous obtenons grâce au théorème de convergence dominée que  $u(x) \cdot \nabla|T(x)| = 0$  et donc que la vitesse, de chaque côté, est tangente à la courbe.  $\square$

Nous avons donc une limite faible  $*$  pour le tourbillon et une limite forte pour la vitesse. Nous allons maintenant regarder la relation entre  $\text{rot } u$  et  $\omega$ .

### 3.3.2 Calcul du rotationnel et de la divergence de la vitesse

Nous remarquons tout d'abord que  $\text{div } u = 0$  sur  $\mathbb{R}^2$  au sens des distributions. En effet,  $u$  est la limite de  $\Phi^\varepsilon u^\varepsilon$  dont la divergence  $\text{div } \Phi^\varepsilon u^\varepsilon = u^\varepsilon \cdot \nabla \Phi^\varepsilon$  tend vers zéro en norme  $L^1$  (voir le lemme 3.2.5).

Calculons désormais le rotationnel de la vitesse limite.

Nous rappelons que la courbe  $\Gamma$  est paramétrée de  $-1$  vers  $1$ . Soit  $\vec{\tau} = \Gamma'/|\Gamma'|$  le vecteur tangent de  $\Gamma$ ,  $u_{up}$  la limite de  $u(\Gamma(s) + \rho \vec{\tau}^\perp)$  quand  $\rho \rightarrow 0^+$  et  $u_{down}$  la limite quand  $\rho \rightarrow 0^-$ .

**Lemme 3.3.8.** *Il existe une fonction  $g_\omega$  qui dépend de  $\Gamma$ ,  $\gamma$  et  $\omega$  telle que*

$$\text{rot } u = \omega + g_\omega(s)\delta_\Gamma,$$

*au sens des distributions.*

*De plus  $g_\omega = (u_{down} - u_{up}) \cdot \vec{\tau}$  ce qui correspond au saut de la vitesse à travers la courbe.*

*Démonstration.* Cette preuve se divise en deux parties. La première partie consiste à montrer que  $\text{rot } u - \omega$  est concentré sur la courbe  $\Gamma$ , et nous déduirons l'expression de  $g_\omega$  dans la seconde partie.

Commençons par calculer  $\text{rot } H$ . Nous rappelons que  $H = 1/2\pi \nabla^\perp \log |T(x)|$ . Soit  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ , nous écrivons :

$$\begin{aligned} \int_{\Pi} \text{rot } (H) \varphi &= - \int_{\Pi} H \cdot \nabla^\perp \varphi \\ &= - \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} \frac{T(x)}{|T(x)|^2} DT(x) \nabla \varphi(x) dx \\ &= - \frac{1}{2\pi} \int_{D^c} \frac{z}{|z|^2} DT(T^{-1}(z)) \nabla \varphi(T^{-1}(z)) |\det DT^{-1}|(z) dz \end{aligned}$$

où nous avons changé de variables  $z = T(x)$ . Comme  $T$  est holomorphe, nous remarquons que

$$\nabla(\varphi \circ T^{-1})(z) = DT^{-1}(z) \nabla \varphi(T^{-1}(z)) = |\det DT^{-1}|(z) DT(T^{-1}(z)) \nabla \varphi(T^{-1}(z)).$$



Nous utilisons les coordonnées polaires ( $z = re^{i\theta}$ ) pour trouver

$$\begin{aligned} \int_{\Pi} \text{rot}(H)\varphi &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_1^\infty \nabla(\varphi \circ T^{-1})(z) \cdot \frac{z}{r} dr d\theta \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_1^\infty \frac{d}{dr}(\varphi \circ T^{-1}(re^{i\theta})) dr d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi \circ T^{-1}(\cos(\theta), \sin(\theta)) d\theta. \end{aligned}$$

La dernière intégrale peut être écrite comme une intégrale de  $\varphi$  sur la courbe  $\Gamma$  avec une certaine masse.

Faisons le même calcul avec la forme explicite de la vitesse et considérons les translations  $\tau_1 : z \mapsto z + T(y)$  et  $\tau_2 : z \mapsto z + T(y)^*$ , pour obtenir :

$$\begin{aligned} \int \text{rot}(u) \cdot \varphi &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \left( \int_{D^c - T(y)} \nabla(\varphi \circ T^{-1} \circ \tau_1)(z) \cdot \frac{z}{|z|^2} dz \right) \omega(y) dy \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \left( \int_{D^c - T(y)^*} \nabla(\varphi \circ T^{-1} \circ \tau_2)(z) \cdot \frac{z}{|z|^2} dz \right) \omega(y) dy \\ &\quad + \alpha \int \text{rot}(H) \cdot \varphi \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(y) \omega(y) dy \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\theta_0(y)}^{\theta_1(y)} [\varphi \circ T^{-1}(A_{1,y}(\theta)) - \varphi \circ T^{-1}(A_{2,y}(\theta))] d\theta \omega(y) dy \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} \varphi \circ T^{-1}(A_{3,y}(\theta)) \omega(y) dy \\ &\quad + \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi \circ T^{-1}(\cos(\theta), \sin(\theta)) d\theta, \end{aligned}$$

avec  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$  construits comme cela : nous considérons la demi-droite qui part de  $T(y)$  et ayant un angle  $\theta$  avec l'axe des abscisses. Comme  $|T(y)| > 1$ , il existe deux angles  $\theta_0 < \theta_1$  tels que la demi-droite soit tangente au cercle unité. Si nous prenons  $\theta \in (\theta_0, \theta_1)$ , alors la demi-droite intersecte le cercle en deux points  $A_2$  et plus loin  $A_1$ . Pour  $A_3$  nous faisons la même chose avec la demi-droite partant de  $T(y)^*$ . Dans ce cas, nous avons une intersection avec le cercle unité pour tout angle.

La difficulté est de faire le changement de variables. En effet, comme  $T^{-1}(A_{i,y}(\theta)) \in \Gamma$ , nous devrions changer de variable  $s = T^{-1}(A_{i,y}(\theta))$  pour obtenir  $\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\Gamma} \varphi(s) f_{i,y}(s) ds dy$ , mais ce calcul est trop compliqué. En fait,

nous venons de prouver que  $\text{rot } u = \omega + g_\omega(s)\delta_\Gamma$ , et nous allons chercher directement une expression de  $g_\omega$ . Pour cela, nous considérons  $v$  la solution du problème de Green sans obstacle :

$$\text{div } v = 0 \text{ et } \text{rot } v = \omega \text{ dans } \mathbb{R}^2.$$

La formule explicite est  $v(x) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2} \omega(y) dy$ . Si nous notons  $w = u - v$ , alors  $\text{rot } w = g_\omega \delta_\Gamma$ . Prouvons maintenant que  $g_\omega = (w_{\text{down}} - w_{\text{up}}) \cdot \vec{\tau}$ , avec  $w_{\text{up}}$  et  $w_{\text{down}}$  définis de la même manière que  $u_{\text{up}}$  et  $u_{\text{down}}$ . Pour  $x \in \Gamma \setminus \{-1; 1\}$ , il existe un petit voisinage  $O$  de  $x$ , tel que  $O \setminus \Gamma$  soit l'union de deux domaines connexes :  $O_{\text{up}}$  et  $O_{\text{down}}$ . Nous avons

$$\int_O \text{rot } w \varphi = \int_\Gamma \varphi(s) g_\omega(s) ds \left( = \int_0^1 \varphi(\Gamma(\eta)) g_\omega(\Gamma(\eta)) |\Gamma'(\eta)| d\eta \right).$$

Or

$$\begin{aligned} \int_O \text{rot } w \varphi &= - \int_O w \cdot \nabla^\perp \varphi = - \int_{O_{\text{up}}} w \cdot \nabla^\perp \varphi - \int_{O_{\text{down}}} w \cdot \nabla^\perp \varphi \\ &= \int_{O_{\text{up}}} \text{rot } w \varphi - \int_{\partial O_{\text{up}}} \varphi w \cdot \vec{\tau}_{\text{up}} + \int_{O_{\text{down}}} \text{rot } w \varphi - \int_{\partial O_{\text{down}}} \varphi w \cdot \vec{\tau}_{\text{down}} \\ &= - \int_\Gamma \varphi w_{\text{up}} \cdot \vec{\tau} + \int_\Gamma \varphi w_{\text{down}} \cdot \vec{\tau} \end{aligned}$$

car  $w = u - v$  est continu sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ .

Nous obtenons bien que  $g_\omega = (w_{\text{down}} - w_{\text{up}}) \cdot \vec{\tau}$ . Sachant que  $v$  est régulier, nous avons

$$g_\omega = \text{rot } w = (u_{\text{down}} - u_{\text{up}}) \cdot \vec{\tau}. \quad (3.3.3)$$

Pour conclure :

$$\int \varphi \text{rot } (u) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(y) \omega(y) dy + \int_\Gamma \varphi(s) g_\omega(s) ds,$$

avec  $g_\omega$ , borné sur  $\Gamma \setminus \{-1; 1\}$ , et équivalent aux extrémités à

$$\frac{1}{\pi} \frac{A(\pm 1)}{\sqrt{|s-1||s+1|}}$$

avec

$$A(\pm 1) = C_{\pm 1} \left| \int_{\mathbb{R}^2} \left( \frac{(T(\pm 1) - T(y))^\perp}{|T(\pm 1) - T(y)|^2} - \frac{(T(\pm 1) - T(y)^*)^\perp}{|T(\pm 1) - T(y)^*|^2} \right) \omega(y, t) dy + \alpha T(\pm 1)^\perp \right|$$

qui est borné. Nous pouvons prouver la continuité de  $g_\omega$  comme nous l'avons fait pour  $u$  dans la proposition 3.3.7.  $\square$

Une simplification semble difficile, et nous ne pouvons pas obtenir un résultat du genre  $\text{rot } u = \omega + g(s)\delta_\Gamma$  avec  $g$  indépendant du temps. Même dans le cas simple où  $\Gamma$  est le segment  $[-1, 1]$ , le calcul de  $g_\omega$  ne donne rien de simple. Nous pouvons cependant expliciter le calcul de  $\text{rot}(H)$  dans ce cas :  $T^{-1}(\cos(\theta), \sin(\theta)) = (\cos(\theta), 0)$  et nous changeons de variables  $\eta = \cos \theta$  pour avoir

$$\int \text{rot}(H)\varphi = 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \varphi(\cos(\theta), 0) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\eta, 0)}{\sqrt{1-\eta^2}} d\eta.$$

Nous remarquons bien que le terme  $1/\sqrt{1-\eta^2}$  explose aux extrémités de  $\Gamma$  comme l'inverse de la racine carrée de la distance.

### 3.3.3 Equation du tourbillon limite sur le plan

Nous commençons par observer que la suite  $\{\Phi^\varepsilon \omega^\varepsilon\}$  est bornée dans  $L^\infty([0, \mathbf{T}], L^4)$ , et donc, quitte à passer à une sous-suite, nous avons

$$\Phi^\varepsilon \omega^\varepsilon \rightharpoonup \omega, \text{ faible-}^* \text{ dans } L^\infty([0, \mathbf{T}], L^4).$$

Nous avons déjà la vitesse limite.

L'objectif de cette sous-partie est de montrer que  $u$  et  $\omega$  vérifient, dans un sens à définir, le système :

$$\begin{cases} \partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0, & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \\ \text{div } u = 0 \text{ et } \text{rot } u = \omega + g_\omega(s)\delta_\Gamma, & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times [0, \infty) \\ |u| \rightarrow 0, & \text{quand } |x| \rightarrow \infty \\ \omega(x, 0) = \omega_0(x), & \text{dans } \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (3.3.4)$$

où  $\delta_\Gamma$  est la fonction Dirac le long de la courbe et où  $g_\omega$  est donnée dans (3.3.3).

**Définition 3.3.9.** *La paire  $(u, \omega)$  est une solution faible du système précédent si*

(a) *pour toute fonction test  $\varphi \in C_c^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R}^2)$  nous avons*

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_t \omega dx dt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \nabla \varphi \cdot u \omega dx dt + \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, 0) \omega_0(x) dx = 0,$$

(b) *nous avons  $\text{div } u = 0$  et  $\text{rot } u = \omega + g_\omega \delta_\Gamma$  au sens des distributions dans  $\mathbb{R}^2$  et  $|u| \rightarrow 0$  à l'infini.*

**Théorème 3.3.10.** *La paire  $(u, \omega)$  obtenue est une solution faible du système précédent.*

*Démonstration.* Le second point de la définition est directement vérifié d'après la sous-partie précédente et d'après la sous-partie 2.2.7 concernant le comportement à l'infini. En effet, en utilisant le support compact de  $\omega$ , la vitesse vérifie  $|u| \rightarrow 0$  à l'infini, grâce au comportement de  $K[\omega]$  et  $H$  (voir (2.2.4) et (2.2.6)).

Nous introduisons ensuite un opérateur  $I_\varepsilon$ , qui à une fonction test  $\varphi \in C_0^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R}^2)$  associe

$$I_\varepsilon[\varphi] \equiv \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_t (\Phi^\varepsilon)^2 \omega^\varepsilon dx dt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \nabla \varphi \cdot (\Phi^\varepsilon u^\varepsilon) (\Phi^\varepsilon \omega^\varepsilon) dx dt.$$

Pour prouver que  $(u, \omega)$  est une solution faible, nous montrerons que

- (i)  $I_\varepsilon[\varphi] + \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, 0) \omega_0(x) dx \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$
- (ii)  $I_\varepsilon[\varphi] \rightarrow \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_t \omega dx dt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \nabla \varphi \cdot u \omega dx dt$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Ces deux points démontrés, il est clair que la preuve sera terminée.

Commençons par montrer (i). Comme  $u^\varepsilon$  et  $\omega^\varepsilon$  vérifient (3.1.2), nous pouvons facilement voir que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_t (\Phi^\varepsilon)^2 \omega^\varepsilon dx dt &= - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \nabla (\varphi (\Phi^\varepsilon)^2) \cdot u^\varepsilon \omega^\varepsilon dx dt \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, 0) (\Phi^\varepsilon)^2(x) \omega_0(x) dx. \end{aligned}$$

Nous calculons alors

$$I_\varepsilon[\varphi] = -2 \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \varphi \nabla \Phi^\varepsilon \cdot u^\varepsilon (\Phi^\varepsilon \omega^\varepsilon) dx dt - \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, 0) (\Phi^\varepsilon)^2(x) \omega_0(x) dx$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \left| I_\varepsilon[\varphi] + \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, 0) (\Phi^\varepsilon)^2(x) \omega_0(x) dx \right| &\leq 2 \|\Phi^\varepsilon \omega^\varepsilon\|_{L^\infty(L^\infty)} \|\varphi\|_{L^1(L^\infty)} \|u^\varepsilon \cdot \nabla \Phi^\varepsilon\|_{L^\infty(L^1)} \\ &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  (voir le lemme 3.2.5). Ceci montre (i) pour tout  $\varepsilon$  assez petit tel que  $(\Phi^\varepsilon)^2(x) \omega_0 = \omega_0$ , ce qui est possible car le support de  $\omega_0$  n'intersecte pas la courbe.

En ce qui concerne (ii), le terme linéaire ne présente aucune difficulté. La seconde partie se traite par une convergence faible-forte de la paire tourbillon-vitesse :

$$\begin{aligned} \left| \int \int \nabla \varphi \cdot (\Phi^\varepsilon u^\varepsilon) (\Phi^\varepsilon \omega^\varepsilon) - \int \int \nabla \varphi \cdot u \omega \right| &\leq \left| \int \int \nabla \varphi \cdot (\Phi^\varepsilon u^\varepsilon - u) (\Phi^\varepsilon \omega^\varepsilon) \right| \\ &\quad + \left| \int \int \nabla \varphi \cdot u (\Phi^\varepsilon \omega^\varepsilon - \omega) \right|. \end{aligned}$$

Or  $\Phi^\varepsilon u^\varepsilon \rightarrow u$  fortement dans  $L^2([0, \mathbf{T}], L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^2))$  grâce au théorème 3.3.6. Le premier terme tend donc vers zéro car  $\Phi^\varepsilon \omega^\varepsilon$  est borné dans  $L^\infty([0, \infty), L^2(\mathbb{R}^2))$ . De la même manière, le second terme tend vers zéro car  $\Phi^\varepsilon \omega^\varepsilon \rightharpoonup \omega$  faible- $*$  dans  $L^\infty([0, \mathbf{T}], L^4(\mathbb{R}^2))$  et  $u \in L^\infty([0, \mathbf{T}], L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^2))$ .  $\square$

### 3.3.4 Equation de la vitesse limite sur le plan

Comme la fonction  $u$  est bornée dans  $L^2$ , nous pouvons écrire une équation en vitesse plus facilement que dans [12]. Le calcul principal de ce sous-chapitre peut être trouvé dans [12].

Nous commençons par introduire  $v(x) = \int K(x-y)\omega(y)dy$  avec  $K(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{x^\perp}{|x|^2}$ , la solution sans obstacle de

$$\begin{cases} \operatorname{div} v = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^2, \\ \operatorname{rot} v = \omega & \text{sur } \mathbb{R}^2, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |v| = 0. \end{cases}$$

Cette vitesse est bornée, et nous notons la perturbation due à la courbe par  $w = u - v$ , qui est donc bornée dans  $L_{\text{loc}}^p$  pour  $p < 4$ , et qui vérifie

$$\begin{cases} \operatorname{div} w = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^2, \\ \operatorname{rot} w = g_\omega(s)\delta_\Gamma & \text{sur } \mathbb{R}^2, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |w| = 0. \end{cases}$$

Nous allons montrer que  $v$  vérifie l'équation suivante :

$$\begin{cases} v_t + v \cdot \nabla v + v \cdot \nabla w + w \cdot \nabla v - v(s)^\perp \tilde{g}_v(s)\delta_\Gamma = -\nabla p, & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \\ \operatorname{div} v = 0, & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \\ w(x) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{(x-s)^\perp}{|x-s|^2} \tilde{g}_v(s)ds, & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \\ v(x, 0) = K[\omega_0], & \text{dans } \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (3.3.5)$$

avec  $\tilde{g}_v = g_{\operatorname{rot} v}$ .

Pour montrer l'équivalence de (3.3.4) et (3.3.5) il suffit de montrer que

$$\operatorname{rot} [v \cdot \nabla w + w \cdot \nabla v - v(s)^\perp \tilde{g}_v(s)\delta_\Gamma] = \operatorname{div} (\omega w) \quad (3.3.6)$$

pour tout champ de divergence nulle  $v \in W_{\text{loc}}^{1,p}$ , avec  $p > 2$ . En effet, si (3.3.6) est vérifié, alors nous obtenons pour  $\omega = \operatorname{rot} v$

$$\begin{aligned} 0 &= -\operatorname{rot} \nabla p = \operatorname{rot} [v_t + v \cdot \nabla v + v \cdot \nabla w + w \cdot \nabla v - v(s)^\perp \tilde{g}_v(s)\delta_\Gamma] \\ &= \partial_t \omega + v \cdot \nabla \omega + w \cdot \nabla \omega = \partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0, \end{aligned}$$

et donc (3.3.4) est aussi vérifié. Inversement, si (3.3.4) est vérifié alors nous déduisons que le terme de gauche dans (3.3.5) est de rotationnel nul, ce qui signifie que cela correspond à un gradient.

Prouvons donc (3.3.6). Comme  $W_{\text{loc}}^{1,p} \subset \mathcal{C}^0$ ,  $v(s)$  est bien défini. Il suffit en fait de montrer l'égalité pour  $v \in C^\infty$ , car nous pouvons passer à la limite pour une suite d'approximation de  $v$  qui converge fortement dans  $W_{\text{loc}}^{1,p}$  et  $\mathcal{C}^0$ . Il est aisé de vérifier que pour  $A$  une matrice  $2 \times 2$  avec des coefficients qui sont des distributions, nous avons

$$\text{rot div } A = \text{div} \begin{pmatrix} \text{rot } C_1 \\ \text{rot } C_2 \end{pmatrix}$$

où  $C_i$  est la  $i$ ème colonne de  $A$ . Pour  $v$  régulier, nous trouvons

$$\begin{aligned} \text{rot } [v \cdot \nabla w + w \cdot \nabla v] &= \text{rot div } (v \otimes w + w \otimes v) \\ &= \text{div} \begin{pmatrix} \text{rot } (vw_1) + \text{rot } (wv_1) \\ \text{rot } (vw_2) + \text{rot } (wv_2) \end{pmatrix} \\ &= \text{div } (w \text{ rot } v + v \cdot \nabla^\perp w + v \text{ rot } w + w \cdot \nabla^\perp v). \end{aligned}$$

Avec un petit calcul, nous vérifions que

$$\text{div } (v \cdot \nabla^\perp w + w \cdot \nabla^\perp v) = v \cdot \nabla^\perp \text{div } w + w \cdot \nabla^\perp \text{div } v + \text{rot } v \text{ div } w + \text{rot } w \text{ div } v.$$

En se rappelant enfin que nous travaillons avec des champs à divergence nulle, nous finissons en écrivant

$$\begin{aligned} \text{rot } [v \cdot \nabla w + w \cdot \nabla v] &= \text{div } (w \text{ rot } v + v \tilde{g}_v(s) \delta_\Gamma) \\ &= \text{div } (w \text{ rot } v) + \text{rot } [v(s)^\perp \tilde{g}_v(s) \delta_\Gamma]. \end{aligned}$$

ce qui montre (3.3.6).

Nous pouvons aussi écrire une formulation avec la vitesse  $u$ , en remplaçant  $v$  par  $u - w$  pour obtenir sur  $\mathbb{R}^2$

$$u_t + u \cdot \nabla u = -\nabla p + w_t + w \cdot \nabla w + v(s)^\perp \tilde{g}_v(s) \delta_\Gamma.$$

Si cette forme est un peu complexe, nous pouvons quand même constater que  $\text{rot } [w_t + w \cdot \nabla w + v(s)^\perp \tilde{g}_v(s) \delta_\Gamma] = 0$  dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ , car  $\text{rot } w = 0$  sur ce même domaine.

### 3.3.5 Formulation sur l'extérieur de la courbe

Nous pouvons obtenir directement une équation pour  $u$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  en passant à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Nous multiplions l'équation de vitesse (3.1.1) par

un champ de vecteurs test à divergence nulle  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma))$  et nous supposons que  $\varepsilon$  est assez petit pour que le support de  $\varphi$  soit contenu dans  $\Pi_\varepsilon$  et qu'il n'intersecte pas le support de  $\nabla \Phi^\varepsilon$  (ce qui est possible d'après la proposition 2.1.9). Après intégration

$$\int_0^\infty \int u^\varepsilon \cdot \partial_t \varphi + \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma} u^\varepsilon(\cdot, 0) \cdot \varphi(\cdot, 0) + \int_0^\infty \int (u^\varepsilon \otimes u^\varepsilon) \cdot \nabla \varphi = 0,$$

ce qui passe facilement à la limite car  $u^\varepsilon \rightarrow u$  fortement dans  $L_{\text{loc}}^2$  par le théorème 3.3.6. En effet, nous pouvons démontrer que  $u_0^\varepsilon \rightarrow u_0$  dans  $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^2)$  grâce à la preuve du théorème 3.3.6. Nous démontrerons rigoureusement ce passage à la limite dans le lemme 4.2.2. Nous avons donc  $u$  qui vérifie au sens des distributions l'équation d'Euler à l'extérieur de la courbe  $\Gamma$  :

$$\begin{cases} u_t + u \cdot \nabla u = -\nabla p, & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \times (0, \infty) \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \times [0, \infty) \\ u \cdot \hat{n} = 0 & \text{sur } \Gamma \times [0, \infty) \\ |u| \rightarrow 0, & \text{quand } |x| \rightarrow \infty \\ u(x, 0) = F(\omega_0, \gamma) & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \end{cases}$$

où  $F$  est la formule du théorème 3.3.6, donnant explicitement la vitesse en fonction du tourbillon et de la circulation.

### 3.4 Remarques dans le cas où la vitesse n'est pas nulle à l'infini

La question posée ici est la suivante : nous construisons dans tous les problèmes ([11, 12, 13, 14, 17, 18]) une vitesse qui est nulle à l'infini. Que deviennent ces résultats si nous supposons que la vitesse est constante et non nulle à l'infini ? Cette question est souvent posée car elle est inspirée d'un problème de dynamique de fluide. En physique, quand nous voulons étudier l'influence d'un obstacle en mouvement dans un fluide (par exemple une aile d'avion dans l'air), par un changement de référentiel, nous pouvons supposer que l'obstacle est fixe et que le fluide à l'infini est en mouvement, de vitesse opposée à celle de l'obstacle. L'envie naturelle est de prétendre que nos résultats s'étendent à ce cas plus général. Mais que devient la loi de Biot-Savart dans ce cas ? Nous ne pouvons pas poser directement  $v = u - C$  sans perdre la condition de tangence au bord de l'obstacle. L'idée serait donc d'enlever la constante juste à l'infini, mais nous verrons apparaître des termes additionnels engendrés par la fonction troncature.

L'objectif ici est donc d'étendre rigoureusement ce qui a été fait dans ce chapitre (fluide visqueux en dimension deux, autour d'un obstacle qui tend vers une courbe) au cas où nous ne supposons plus que la vitesse soit nulle à l'infini. L'extension des autres travaux nécessiterait une étude spécifique afin de vérifier que toutes les propriétés s'appliquent encore. La première sous-partie est commune car elle concerne la loi de Biot-Savart. Nous choisissons ensuite de ne faire que le cas traité dans ce chapitre. Reprenons donc le plan, et vérifions point par point que tout se passe bien.

### Loi de Biot-Savart

Nous cherchons ici à exprimer la vitesse en fonction du tourbillon initial  $\omega_0$ , la circulation  $\gamma$  de la vitesse autour de  $\Omega_\varepsilon$  et la limite  $u^\infty = (u_1^\infty, u_2^\infty)$  de la vitesse à l'infini. La vitesse et le tourbillon sont donc couplés par

$$\begin{cases} \operatorname{div} u^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Pi_\varepsilon \times [0, \infty) \\ \operatorname{rot} u^\varepsilon = \omega^\varepsilon & \text{dans } \Pi_\varepsilon \times [0, \infty) \\ u^\varepsilon \cdot \hat{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_\varepsilon \times [0, \infty) \\ \oint u^\varepsilon \cdot \mathbf{ds} = \gamma & \text{pour } t \in [0, \infty) \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u^\varepsilon = u^\infty & \text{pour } t \in [0, \infty) \end{cases}$$

Nous nous servons donc ici de la fonction troncature régulière  $\eta$  valant zéro sur  $B(0, R)$  (avec  $R$  grand) et valant 1 à l'extérieur de  $B(0, R+1)$ . Comme nous désirons avoir un champ de vitesse à divergence nulle, nous poserons

$$v^\varepsilon = u^\varepsilon - \nabla^\perp(\eta\Phi)$$

avec  $\Phi(x_1, x_2) = -u_1^\infty x_2 + u_2^\infty x_1$ . Nous avons bien  $v^\varepsilon = u^\varepsilon$  sur  $B(0, R)$ , et donc que ce champ est tangent au bord, de circulation autour de l'obstacle  $\gamma$ , et que  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} v^\varepsilon = 0$ . Si nous calculons son rotationnel, nous trouvons

$$\tilde{\omega}^\varepsilon \equiv \operatorname{rot} v^\varepsilon = \omega^\varepsilon - \Delta(\eta\Phi),$$

avec  $\Delta(\eta\Phi) \in C_c^\infty$  à support dans  $B(0, R+1) \setminus B(0, R)$ . Nous avons alors que  $v^\varepsilon$  et  $\tilde{\omega}^\varepsilon$  sont couplés par

$$\begin{cases} \operatorname{div} v^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Pi_\varepsilon \times [0, \infty) \\ \operatorname{rot} v^\varepsilon = \tilde{\omega}^\varepsilon & \text{dans } \Pi_\varepsilon \times [0, \infty) \\ v^\varepsilon \cdot \hat{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_\varepsilon \times [0, \infty) \\ \oint v^\varepsilon \cdot \mathbf{ds} = \gamma & \text{pour } t \in [0, \infty) \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} v^\varepsilon = 0 & \text{pour } t \in [0, \infty) \end{cases}$$



et nous pouvons appliquer la loi de Biot-Savart trouvée dans (2.2.7) pour écrire que

$$v^\varepsilon(x, t) = K^\varepsilon[\tilde{\omega}^\varepsilon(\cdot, t)](x) + \alpha H^\varepsilon(x)$$

avec

$$\alpha = \gamma + \int_{\Pi_\varepsilon} (\omega_0 - \Delta(\eta\Phi))(x) dx = \gamma + \int_{\Pi_\varepsilon} \omega_0.$$

En effet,  $\Delta(\eta\Phi)$  a son support inclus dans  $B(0, R+1)$  et nous avons par intégration par parties que

$$- \int_{\Pi_\varepsilon} \Delta(\eta\Phi)(x) dx = - \int_{B(0, R+1)} \Delta(\eta\Phi)(x) dx = \int_{\partial B(0, R+1)} (u^\infty)^\perp \cdot n ds = 0$$

par symétrie.

Nous obtenons donc que

$$u^\varepsilon(x, t) = K^\varepsilon[\omega^\varepsilon(\cdot, t) - \Delta(\eta\Phi)](x) + \alpha H^\varepsilon(x) + \nabla^\perp(\eta\Phi)(x).$$

## Passage à la limite

Il suffit ici de se rappeler de l'idée de la démonstration pour constater que tout va bien s'appliquer. En effet, les normes  $L^p$  de  $\omega^\varepsilon$  sont toujours conservées et nous avons alors que les normes  $L^p$  de  $\tilde{\omega}$  sont majorées, ce qui permet d'obtenir le théorème 3.2.4 pour  $v$ . Le lemme 3.2.5 et les estimations temporelles ne changent pas, car la vitesse est uniformément bornée loin des obstacles. Nous obtenons alors les mêmes convergences pour  $\omega^\varepsilon$  vers  $\omega$  et  $\tilde{\omega}^\varepsilon$  vers  $\tilde{\omega} \equiv \omega - \Delta(\eta\Phi)$ , ce qui permet de passer à la limite dans la loi de Biot-Savart exactement comme cela a été fait dans la partie 3.3.1 pour obtenir une limite forte des vitesses dans  $L^2_{\text{loc}}$  vers

$$u = \frac{1}{2\pi} DT^t(x) \int_{\mathbb{R}^2} \left( \frac{(T(x) - T(y))^\perp}{|T(x) - T(y)|^2} - \frac{(T(x) - T(y)^*)^\perp}{|T(x) - T(y)^*|^2} \right) (\omega(y, t) - \Delta(\eta\Phi)(y)) dy + \alpha H(x) + \nabla^\perp(\eta\Phi)(x). \quad (3.4.1)$$

La proposition 3.3.7 s'applique alors à cette vitesse. Nous obtenons enfin de la même manière :

**Théorème 3.4.1.** *Il existe une sous-suite  $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$  telle que*

- (a)  $\Phi^\varepsilon u^\varepsilon \rightarrow u$  fortement dans  $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$  ;
- (b)  $\Phi^\varepsilon \omega^\varepsilon \rightarrow \omega$  faible \* dans  $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^4_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2))$  ;
- (c)  $u$  est donnée en fonction de  $\omega$  et  $\gamma$  par la relation explicite (3.4.1) ;

(d)  $u$  et  $\omega$  vérifient au sens faible :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0, & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \\ \operatorname{div} u = 0 \text{ et } \operatorname{rot} u = \omega + g_\omega(s) \delta_\Gamma, & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times [0, \infty) \\ |u| \rightarrow u^\infty, & \text{quand } |x| \rightarrow \infty \\ \omega(x, 0) = \omega_0(x), & \text{dans } \mathbb{R}^2. \end{array} \right.$$



# Chapitre 4

## Navier-Stokes en dimension deux

### Résumé

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié la limite des solutions de l'équation d'Euler, en dimension deux, à l'extérieur d'un obstacle fin qui tendait vers une courbe. Nous considérons dans ce chapitre le même problème dans le cas d'un fluide visqueux. Nous prouverons que le fluide converge vers une solution des équations de Navier-Stokes à l'extérieur de la courbe. L'unicité de la solution d'une telle équation sera de plus démontrée.

Inclus dans l'article *Two Dimensional Incompressible Viscous Flow Around a Thin Obstacle Tending to a Curve*, soumis.

## 4.1 Introduction

Nous étudions dans ce chapitre l'influence d'un obstacle fin sur un fluide visqueux incompressible en dimension deux. Comme dans le chapitre précédent, nous nous donnons une famille d'obstacles  $\Omega_\varepsilon$  (ouverts, bornés, réguliers, connexes et simplement connexes) qui se contractent vers une courbe  $\Gamma$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  dans le sens donné à la sous-partie 2.1.2. De même, nous considérons comme donnée initiale deux quantités indépendantes de  $\varepsilon$  : un tourbillon initial  $\omega_0 \in C_c^\infty$  dont le support est disjoint de la courbe  $\Gamma$  et la circulation  $\gamma$  de la vitesse initiale autour de l'obstacle. La géométrie de l'obstacle étant donnée, nous avons montré dans la partie 2.2 que ces deux quantités suffisaient à déterminer de manière unique un champ de vitesse à divergence nulle, tangent au bord et de limite nulle à l'infini. Cette forme explicite est donnée dans (2.2.7) :

$$u_0^\varepsilon = u_0^\varepsilon(x) = K^\varepsilon[\omega_0](x) + \alpha H^\varepsilon(x) \quad (4.1.1)$$

avec  $\alpha = \gamma + \int_{\Pi_\varepsilon} \omega_0(x)$ . Soit  $u^\varepsilon = u^\varepsilon(x, t) = (u_1^\varepsilon(x_1, x_2, t), u_2^\varepsilon(x_1, x_2, t))$  la vitesse du fluide visqueux incompressible dans  $\Pi_\varepsilon \equiv \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}$ , vérifiant la condition de non-glissement pour tout temps positif et telle que  $u^\varepsilon \rightarrow 0$  quand  $|x| \rightarrow \infty$ . L'évolution d'un tel fluide est gouvernée par les équations de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon - \nu \Delta u^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon = -\nabla p^\varepsilon & \text{dans } \Pi_\varepsilon \times (0, \infty) \\ \operatorname{div} u^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Pi_\varepsilon \times [0, \infty) \\ u^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Gamma_\varepsilon \times (0, \infty) \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |u^\varepsilon| = 0 & \text{pour } t \in [0, \infty) \\ u^\varepsilon(x, 0) = u_0^\varepsilon(x) & \text{dans } \Pi_\varepsilon \end{cases} \quad (4.1.2)$$

Comme  $u_0^\varepsilon$  est régulier et donc localement borné, le comportement à l'infini donné par (2.2.6) nous permet d'observer que  $u_0^\varepsilon \in L^{2,\infty}(\Pi_\varepsilon) \cap L^p(\Pi_\varepsilon)$  avec  $p > 2$ . Kozono et Yamazaki [16] ont établi l'existence et l'unicité du problème (4.1.2) à condition que la donnée initiale  $u_0^\varepsilon$  satisfasse la condition suivante

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} R |\{x \in \Pi_\varepsilon \mid |u_0^\varepsilon(x)| > R\}|^{1/2} \ll 1. \quad (4.1.3)$$

Sachant que  $u_0^\varepsilon$  est bornée, cette limsup vaut toujours zéro, pour tout  $\varepsilon > 0$ .

L'objectif est de déterminer la limite des solutions des équations de Navier-Stokes à l'extérieur de  $\Omega_\varepsilon$  quand l'obstacle s'aplatit vers la courbe quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Nous montrons tout d'abord que les vitesses initiales convergent vers le champ

$$u_0 = K[\omega_0](x) + \alpha H(x), \quad (4.1.4)$$

avec  $K$  et  $H$  définis comme (2.2.2) et (2.2.5), en remplaçant  $T_\varepsilon$  par  $T$  (voir (4.2.1) et (4.2.2)). Nous prouvons ensuite que le champ de vitesse limite est une solution des équations de Navier-Stokes à l'extérieur de la courbe, dans le sens suivant. Vu (4.1.4) et (2.2.6), la vitesse initiale se comporte comme  $\frac{1}{|x|}$  à l'infini, ce qui n'est pas de carré intégrable. Pour une telle donnée initiale, nous définissons une solution des équations de Navier-Stokes comme un champ de vitesse qui vérifie l'équation au sens faible et tel que la différence entre cette solution et un champ de vecteurs régulier fixe (se comportant comme  $\frac{1}{|x|}$  à l'infini) possède une régularité à la Leray (voir la définition 4.4.4 pour la définition exacte). Nous montrons alors le théorème suivant.

**Théorème 4.1.1.** *Soient  $\omega_0$  et  $\gamma$  indépendants de  $\varepsilon$  définis comme précédemment. Soit  $u^\varepsilon$  la solution des équations de Navier-Stokes sur  $\Pi_\varepsilon$  avec pour vitesse initiale  $u_0^\varepsilon$  (défini dans (4.1.1)) et notons  $Eu^\varepsilon$  l'extension de  $u^\varepsilon$  sur  $\mathbb{R}^2$  en posant 0 sur  $\Omega_\varepsilon$ . Alors  $\{Eu^\varepsilon\}$  converge dans  $L^2_{\text{loc}}([0, \infty) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma))$  vers une solution des équations de Navier-Stokes sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  (dans le sens donné par la définition 4.4.4) avec pour tourbillon initial  $\omega_0 + g_\omega \delta_\Gamma$  (où  $g_\omega$  est la fonction définie dans (3.3.3) et  $\delta_\Gamma$  la fonction Dirac le long de la courbe) et pour vitesse initiale  $u_0$  donnée par (4.1.4). De plus, une telle solution (sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ ) est unique.*

Nous rappelons que les principales notations sont listées à la fin du chapitre 1. Nous utilisons aussi les fonctions troncatures introduites dans la sous-partie 2.2.4.

## 4.2 Limite de la donnée initiale

L'objectif de cette partie est d'étudier la convergence de la vitesse initiale  $u_0^\varepsilon$  définie dans (4.1.1) quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Commençons par introduire une notation : pour chaque fonction  $f$  définie sur  $\Pi_\varepsilon$ , nous notons par  $Ef$  l'extension de  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$ , en posant  $Ef \equiv 0$  sur  $\Pi_\varepsilon$ . Si  $f$  est assez régulière et s'annule sur  $\partial\Omega_\varepsilon$ , nous avons que  $\nabla Ef = E\nabla f$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Si  $v$  est un champ de vecteurs assez régulier défini sur  $\Pi_\varepsilon$  qui est tangent au bord  $\partial\Omega_\varepsilon$ , alors  $\text{div } Ev = E\text{div } v$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Nous avons en particulier  $\text{div } Eu_0^\varepsilon = 0$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

Les deux lemmes suivants sont une conséquence du travail réalisé sur les fluides idéaux dans le chapitre 3.

**Lemme 4.2.1.** *Pour  $2 < p \leq 3$ , il existe  $C_p > 0$  dépendant seulement de  $\Gamma$  et  $\omega_0$ , tel que*

$$\|Eu_0^\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq C_p.$$

*Démonstration.* Par le théorème 3.2.4, nous avons que  $\|Eu_0^\varepsilon\|_{L^p(S)} \leq C\|EDT_\varepsilon\|_{L^p(S)}$  pour tout  $S \subset \mathbb{R}^2$ . Nous utilisons alors la remarque 2.1.7 pour observer qu'il existe pour tout  $R > 0$  une constante  $C_p$  telle que  $\|Eu_0^\varepsilon\|_{L^p(B(0,R))} \leq C_p$  pour  $p \leq 3$ . En rappelant (4.1.1), (2.2.4), (2.2.6) et l'hypothèse 2.1.6 la conclusion désirée découle du fait que la fonction  $x \mapsto 1/|x|$  est  $L^p$  pour  $p > 2$  à l'infini.  $\square$

**Lemme 4.2.2.** *Nous avons que  $Eu_0^\varepsilon \rightarrow K[\omega_0] + \alpha H$  fortement dans  $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^2)$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .*

*Démonstration.* Le résultat est une conséquence de la sous-partie 3.3.1. En effet, la décomposition faite dans la preuve du théorème 3.3.6 est ici plus simple, car nous ne faisons pas varier le temps. Nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned}
(Eu_0^\varepsilon - u_0)(x) &= \frac{1}{2\pi}(DT_\varepsilon^t(x) - DT^t(x))E \int_{\Pi_\varepsilon} \left( \frac{(T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y))^\perp}{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)|^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)^*)^\perp}{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)^*|^2} \right) \omega_0(y) dy \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}DT^t(x)E \int_{\mathbb{R}^2} \left( \frac{(T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y))^\perp}{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)|^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(T(x) - T(y))^\perp}{|T(x) - T(y)|^2} \right) \omega_0(y) dy \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}DT^t(x)(E - 1) \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(T(x) - T(y))^\perp}{|T(x) - T(y)|^2} \omega_0(y) dy \\
&\quad - \frac{1}{2\pi}DT^t(x)E \int_{\mathbb{R}^2} \left( \frac{(T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)^*)^\perp}{|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)^*|^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(T(x) - T(y)^*)^\perp}{|T(x) - T(y)^*|^2} \right) \omega_0(y) dy \\
&\quad - \frac{1}{2\pi}DT^t(x)(E - 1) \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(T(x) - T(y)^*)^\perp}{|T(x) - T(y)^*|^2} \omega_0(y) dy \\
&\quad + \frac{\alpha}{2\pi}(DT_\varepsilon^t(x) - DT^t(x))E \frac{T_\varepsilon(x)^\perp}{|T_\varepsilon(x)|^2} \\
&\quad + \frac{\alpha}{2\pi}E DT^t(x) \left( \frac{T_\varepsilon(x)^\perp}{|T_\varepsilon(x)|^2} - \frac{T(x)^\perp}{|T(x)|^2} \right) \\
&\quad + \frac{\alpha}{2\pi}(E - 1)DT^t(x) \frac{T(x)^\perp}{|T(x)|^2} \\
&\equiv J_1 + \dots + J_8.
\end{aligned}$$

Tous les termes convergent vers zéro, grâce à la proposition 2.1.2, l'hypothèse 2.1.6, les majorations de  $I_1$  et  $I_2$  dans le lemme 3.2.2, des propositions 3.3.4 et 3.3.5, puis du fait que la taille du support de  $E - 1$  peut être majorée par  $C\varepsilon$ . Ces convergences s'obtiennent en appliquant le théorème de convergence dominée.  $\square$

Nous avons donc montré la convergence forte des données initiales vers le champ

$$u_0 \equiv K[\omega_0] + \alpha H,$$

avec

$$K = \frac{1}{2\pi} DT^t(x) \left( \frac{(T(x) - T(y))^\perp}{|T(x) - T(y)|^2} - \frac{(T(x) - T(y)^*)^\perp}{|T(x) - T(y)^*|^2} \right) \quad (4.2.1)$$

et

$$H = \frac{1}{2\pi} DT^t(x) \left( \frac{(T(x))^\perp}{|T(x)|^2} \right). \quad (4.2.2)$$

Par la proposition 3.3.7, nous savons que  $u_0$  est bornée, sauf aux extrémités de la courbe où il est équivalent à l'inverse de la racine carrée de la distance. Nous observons alors que  $u_0$  vérifie la condition (4.1.3). Nous ne pouvons cependant pas utiliser le résultat de Kozono et Yamazaki car le domaine n'est pas régulier.

### 4.3 Estimation de la vitesse

Nous commençons par introduire quelques espaces fonctionnels qui contiennent les conditions de divergence nulle et de non-glissement au bord.

**Définition 4.3.1.** Soit  $\Omega$  un sous-ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Nous notons par  $V(\Omega)$  l'espace des champs de vecteurs à divergence nulle, dont les composantes appartiennent à  $C_0^\infty(\Omega)$ .

La fermeture de  $V(\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$  est notée par  $\mathcal{V}(\Omega)$ , et son espace dual par  $\mathcal{V}'(\Omega)$ .

Nous noterons en plus par  $\mathcal{H}(\Omega)$  la fermeture de  $V(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$ .

Afin de simplifier les notations, nous définissons aussi  $\mathcal{V}_\Gamma \equiv \mathcal{V}(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)$  et  $\mathcal{H}_\Gamma \equiv \mathcal{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)$ .

Comme la donnée initiale  $u_0^\varepsilon$  n'appartient pas à  $L^2$  ( $u_0^\varepsilon = O(1/|x|)$  à l'infini), nous enlevons la partie harmonique à l'infini. Pour cela, nous introduisons  $W^\varepsilon(t, x) = u^\varepsilon(t, x) - v^\varepsilon(x)$ , où  $v^\varepsilon = \alpha H^\varepsilon \Phi^{\varepsilon, \lambda}$ , avec  $\lambda$  fixé, choisi assez grand pour que les points (iv) et (v) de l'hypothèse 2.1.6 soient vérifiés



pour les rayons des boules où  $\Phi^{\varepsilon,\lambda}$  s'annule. Un tel choix de  $\lambda$  est possible car le rayon de ces boules est  $O(\lambda)$ . Sans perdre de généralité, nous pouvons supposer que ces boules contiennent  $\overline{\Omega_\varepsilon}$ . Grâce à l'hypothèse 2.1.6 et (2.2.6), nous pouvons déduire des estimations pour  $v^\varepsilon$ .

**Lemme 4.3.2.** *Pour  $\lambda$  fixé (indépendant de  $\varepsilon$ ), nous avons que*

- (a)  $v^\varepsilon$  est borné dans  $L^4(\mathbb{R}^2)$  indépendamment de  $\varepsilon$  ;
- (b)  $\nabla v^\varepsilon$  est borné dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$  indépendamment de  $\varepsilon$  ;
- (c)  $\Delta v^\varepsilon$  est borné dans  $L^\infty(\mathbb{R}^2)$  indépendamment de  $\varepsilon$  et son support est inclus dans un compact indépendant de  $\varepsilon$ .

*Démonstration.* Nous rappelons la forme explicite de  $v^\varepsilon$  :

$$v^\varepsilon(x) = \frac{\alpha}{2\pi} \Phi^{\varepsilon,\lambda}(x) DT_\varepsilon^t(x) \left( \frac{(T_\varepsilon(x))^\perp}{|T_\varepsilon(x)|^2} \right),$$

avec  $\Phi^{\varepsilon,\lambda}$  donné dans (2.2.10).

Comme  $\Phi^{\varepsilon,\lambda}$  s'annule dans une boule de rayon  $O(\lambda)$ , les points (i) et (iv) de l'hypothèse 2.1.6 garantissent que  $v^\varepsilon$  est uniformément borné par  $C\Phi^{\varepsilon,\lambda}(x)/|T(x)|$  pour  $\lambda$  assez grand. Comme la fonction  $T$  se comporte comme  $\beta x$  à l'infini (voir la remarque 2.1.5), (a) est alors une conséquence du fait que  $1/|x|$  appartient à  $L^4$  à l'infini.

En utilisant que  $|T_\varepsilon| \geq 1$ , nous obtenons

$$|\nabla v^\varepsilon| \leq \frac{\alpha}{2\pi\lambda} \left| \Phi' \left( \frac{|T_\varepsilon(x)| - 1}{\lambda} \right) \right| |DT_\varepsilon|^2 + \frac{3\alpha}{2\pi} \Phi^{\varepsilon,\lambda}(x) \left( \frac{|D^2 T_\varepsilon|}{|T_\varepsilon(x)|} + \frac{|DT_\varepsilon|^2}{|T_\varepsilon(x)|^2} \right).$$

En tenant compte que le rayon de l'anneau où  $\Phi^{\varepsilon,\lambda}$  est non constant peut être pris indépendant de  $\varepsilon$ , l'hypothèse 2.1.6 (iv) implique que le premier terme de l'inégalité précédente est uniformément borné par rapport à  $x$  et  $\varepsilon$ , et qu'il a son support inclus dans un compact indépendant de  $\varepsilon$ . Les parties (i), (iv) et (v) de l'hypothèse 2.1.6 nous permettent d'affirmer que pour  $\lambda$  assez grand, le second terme est borné par  $C\Phi^{\varepsilon,\lambda}(x)/|x|^2$  (avec  $C$  une constante indépendante de  $\varepsilon$ ), ce qui appartient à  $L^2(\mathbb{R}^2)$ . Ceci prouve bien la propriété (b) du lemme.

Nous remarquons de plus que  $\Delta H^\varepsilon = 0$  en dehors de la boule où  $\Phi^{\lambda,\varepsilon}$  s'annule, car  $H^\varepsilon = \nabla^\perp \ln |T_\varepsilon(x)| = \nabla^\perp \Re(\ln T_\varepsilon(x))$ , avec  $\ln T_\varepsilon$  qui est une fonction holomorphe, et qui vérifie donc  $\Delta \ln T_\varepsilon = 0$ . Puisque  $|T_\varepsilon(x)| \geq 1$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\begin{aligned} |\Delta v^\varepsilon| &\leq C \left| \Phi' \left( \frac{|T_\varepsilon(x)| - 1}{\lambda} \right) \right| (|DT_\varepsilon|^3 + |DT_\varepsilon| |D^2 T_\varepsilon|) \\ &\quad + C \left| \Phi'' \left( \frac{|T_\varepsilon(x)| - 1}{\lambda} \right) \right| |DT_\varepsilon|^3, \end{aligned}$$

ce qui est borné dans  $L^\infty(\mathbb{R}^2)$  uniformément en  $\varepsilon$ , et à support dans un compact indépendant de  $\varepsilon$ .  $\square$

**Lemme 4.3.3.** *Nous avons que  $W_0^\varepsilon \equiv W^\varepsilon(\cdot, 0) = K_\varepsilon[\omega_0] + \alpha(1 - \Phi^{\varepsilon, \lambda})H_\varepsilon$  est borné dans  $L^p$  indépendamment de  $\varepsilon$ , pour  $1 < p \leq 3$ .*

*Démonstration.* Ce lemme peut être établi comme nous avons démontré le lemme 4.2.1, en utilisant que  $W_0^\varepsilon$  se comporte comme  $1/|x|^2$  à l'infini (voir (2.2.4)), ce qui appartient à  $L^p$  pour  $p > 1$ .  $\square$

En particulier,  $W_0^\varepsilon$  est borné dans  $L^2$ , ce qui servira pour obtenir des estimations *a priori* pour  $W^\varepsilon \equiv u^\varepsilon - v^\varepsilon$ .

**Lemme 4.3.4.** *Le champ de vecteurs  $W^\varepsilon$  est borné indépendamment de  $\varepsilon$  dans  $L^\infty_{\text{loc}}([0, \infty); L^2(\Pi_\varepsilon)) \cap L^2_{\text{loc}}([0, \infty); H^1(\Pi_\varepsilon))$ .*

*Démonstration.* Nous récrivons (4.1.2) avec  $W^\varepsilon$  comme cela

$$\begin{cases} \partial_t W^\varepsilon - \nu \Delta W^\varepsilon - \nu \Delta v^\varepsilon + (W^\varepsilon + v^\varepsilon) \cdot \nabla W^\varepsilon + W^\varepsilon \cdot \nabla v^\varepsilon + v^\varepsilon \cdot \nabla v^\varepsilon \\ \hspace{15em} = -\nabla p^\varepsilon \text{ dans } \Pi_\varepsilon \times (0, \infty) \\ \text{div } W^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \Pi_\varepsilon \times (0, \infty) \\ W^\varepsilon(\cdot, t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_\varepsilon \times [0, \infty) \end{cases}$$

En effet,  $\text{div } W^\varepsilon = -\text{div } v^\varepsilon = \alpha H^\varepsilon \cdot \nabla \Phi^{\varepsilon, \lambda} = 0$  d'après (2.2.11). Nous voyons ici l'intérêt de choisir une fonction troncature dépendante de  $\varepsilon$ . Nous multiplions maintenant l'équation précédente par  $W^\varepsilon$  et nous intégrons afin d'obtenir

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\equiv \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|W^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \nu \|\nabla W^\varepsilon\|_{L^2}^2 \\ &= - \int_{\Pi_\varepsilon} [W^\varepsilon \cdot (W^\varepsilon \cdot \nabla v^\varepsilon) + W^\varepsilon \cdot (v^\varepsilon \cdot \nabla v^\varepsilon)] dx + \nu \int_{\Pi_\varepsilon} W^\varepsilon \cdot \Delta v^\varepsilon dx \\ &= \int_{\Pi_\varepsilon} [v^\varepsilon \cdot (W^\varepsilon \cdot \nabla W^\varepsilon) + v^\varepsilon \cdot (v^\varepsilon \cdot \nabla W^\varepsilon)] dx + \nu \int_{\Pi_\varepsilon} W^\varepsilon \cdot \Delta v^\varepsilon dx \\ &\leq \|W^\varepsilon\|_{L^4} \|\nabla W^\varepsilon\|_{L^2} \|v^\varepsilon\|_{L^4} + \|\nabla W^\varepsilon\|_{L^2} \|v^\varepsilon\|_{L^4}^2 + \nu \|W^\varepsilon\|_{L^2} \|\Delta v^\varepsilon\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Nous utilisons ensuite l'inégalité d'interpolation :

$$\|W^\varepsilon\|_{L^4} \leq C \|W^\varepsilon\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla W^\varepsilon\|_{L^2}^{1/2},$$

avec  $C > 0$  une constante indépendante de  $\varepsilon$ . Cette inégalité dans le cas du plan entier  $\mathbb{R}^2$  peut être trouvée dans le chapitre 1 de [20]. Pour obtenir l'inégalité dans  $\Pi_\varepsilon$ , il suffit d'étendre  $W^\varepsilon$  à  $\mathbb{R}^2$  avec des valeurs nulles sur

$\Omega_\varepsilon$ . Comme  $W^\varepsilon$  s'annule sur  $\Gamma_\varepsilon$ , la norme  $H^1$  dans le plan de l'extension est identique à la norme  $H^1$  de  $W^\varepsilon$  dans  $\Pi_\varepsilon$ . De plus,  $\Delta v^\varepsilon$  est borné dans  $L^2$  et  $v^\varepsilon$  est uniformément borné dans  $L^4$  indépendamment de  $\varepsilon$  grâce au lemme 4.3.2. D'où,

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\leq C \|W^\varepsilon\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla W^\varepsilon\|_{L^2}^{3/2} \|v^\varepsilon\|_{L^4} + \|\nabla W^\varepsilon\|_{L^2} \|v^\varepsilon\|_{L^4}^2 + \nu \|W^\varepsilon\|_{L^2} \|\Delta v^\varepsilon\|_{L^2} \\ &\leq \frac{\nu}{2} \|\nabla W^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C_1 \|W^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C_2, \end{aligned}$$

avec  $C_1$  et  $C_2$  des constantes indépendantes de  $\varepsilon$ , et donc

$$\frac{d}{dt} \|W^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \nu \|\nabla W^\varepsilon\|_{L^2}^2 \leq 2C_1 \|W^\varepsilon\|_{L^2}^2 + 2C_2.$$

L'inégalité de Gronwall nous donne que pour tout  $t > 0$ ,

$$e^{-2C_1 t} \|W^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t e^{-2C_1 s} \|\nabla W^\varepsilon(\cdot, s)\|_{L^2}^2 ds \leq \frac{C_2}{C_1} + \|W^\varepsilon(\cdot, 0)\|_{L^2}^2. \quad (4.3.1)$$

En utilisant le fait que  $W^\varepsilon(\cdot, 0)$  est borné dans  $L^2$  indépendamment de  $\varepsilon$  (voir le lemme 4.3.3), nous pouvons récrire (4.3.1) sous la forme

$$\|W^\varepsilon\|_{L^2(\Pi_\varepsilon)}^2 + \nu e^{2C_1 t} \int_0^t e^{-2C_1 s} \|\nabla W^\varepsilon(\cdot, s)\|_{L^2(\Pi_\varepsilon)}^2 ds \leq e^{2C_1 t} C,$$

avec  $C$  constant. Ceci complète la preuve.  $\square$

Nous en déduisons alors le résultat principal de cette partie.

**Théorème 4.3.5.** *Soit  $u^\varepsilon$  la solution de (4.1.2), nous avons alors que*

1. *la famille  $\{Eu^\varepsilon - v^\varepsilon\}$  est bornée dans  $L_{\text{loc}}^\infty([0, \infty); L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L_{\text{loc}}^2([0, \infty); H^1(\mathbb{R}^2))$ .*
2. *la famille  $\{\nabla Eu^\varepsilon\}$  est bornée dans  $L_{\text{loc}}^2([0, \infty); L^2(\mathbb{R}^2))$ .*
3. *la famille  $\{Eu^\varepsilon\}$  est bornée dans  $L_{\text{loc}}^\infty([0, \infty); L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^2)) \cap L_{\text{loc}}^4([0, \infty); L^4(\mathbb{R}^2))$ .*

*Démonstration.* La preuve est une conséquence des lemmes 4.3.2 et 4.3.4. En effet, le point 1. découle du lemme 4.3.4, alors que le point 2. est une conséquence de ce même lemme et du point (b) du lemme 4.3.2. Pour montrer le point 3., nous utilisons encore l'inégalité d'interpolation  $\|W^\varepsilon\|_{L^4(L^4)} \leq C \|W^\varepsilon\|_{L^\infty(L^2)}^{1/2} \|\nabla W^\varepsilon\|_{L^2(L^2)}^{1/2}$  ce qui assure que  $W^\varepsilon$  est uniformément borné dans  $L_{\text{loc}}^4([0, \infty); L^4(\mathbb{R}^2))$ . Il suffit alors d'utiliser le lemme 4.3.2 (a) pour obtenir la borne uniforme dans  $L_{\text{loc}}^4([0, \infty); L^4(\mathbb{R}^2))$  pour  $u^\varepsilon$  (alors que  $Eu_0^\varepsilon$  n'est pas uniformément borné dans  $L_{\text{loc}}^4(\mathbb{R}^2)$ ).  $\square$

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , nous savons que  $\operatorname{div} EW^\varepsilon = \operatorname{div} Eu^\varepsilon = 0$  sur  $\mathbb{R}^2$ . De plus, comme les supports de  $EW^\varepsilon$  et de  $Eu^\varepsilon$  sont contenus dans  $\Pi_\varepsilon$ , nous pouvons transposer le théorème précédent avec les espaces fonctionnels de la définition 4.3.1.

**Corollaire 4.3.6.** *Soit  $u^\varepsilon$  la solution de (4.1.2), nous avons alors que*

1. *la famille  $\{Eu^\varepsilon - v^\varepsilon\}$  est bornée dans  $L_{\text{loc}}^\infty([0, \infty); \mathcal{H}_\Gamma) \cap L_{\text{loc}}^2([0, \infty); \mathcal{V}_\Gamma)$ .*
2. *la famille  $\{\nabla Eu^\varepsilon\}$  est bornée dans  $L_{\text{loc}}^2([0, \infty); \mathcal{H}_\Gamma)$ .*

Nous démontrons maintenant une proposition sur la régularisation des fonctions de  $L_{\text{loc}}^2([0, \infty); \mathcal{V}_\Gamma)$ .

**Proposition 4.3.7.** *Soient  $T \in [0, +\infty)$  et  $f \in L^2([0, T]; \mathcal{V}_\Gamma)$ . Il existe une suite  $\{f_n\}$  de fonctions à divergence nulle qui appartiennent à  $C_c^\infty((0, T) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma))$  telle que  $f_n \rightarrow f$  dans  $L^2([0, T], \mathcal{V}_\Gamma)$ .*

*Démonstration.* Afin de trouver cette famille, nous commençons par régulariser en temps comme cela est fait dans [34]. Pour cela, nous multiplions  $f$  par une fonction caractéristique  $\chi_{[1/n, T-1/n]}$  et nous régularisons par une fonction  $\rho_n(t)$  telle que la taille du support de  $\rho_n$  est inférieur à  $1/(2n)$ . Nous obtenons alors une famille  $\{\rho_n * (\chi_{[1/n, T-1/n]} f)\}$  de fonctions qui appartiennent à  $C_c^\infty((0, T), \mathcal{V}_\Gamma)$  et qui tendent vers  $f$  dans  $L^2([0, T], \mathcal{V}_\Gamma)$ . Nous allons maintenant approcher les fonctions  $C_c^\infty(\mathcal{V}_\Gamma)$  par des fonctions  $C_c^\infty((0, T) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma))$  à divergence nulle, ce qui nous permettra par une extraction diagonale de conclure.

Comme  $\mathcal{V}_\Gamma$  est un espace d'Hilbert séparable pour le produit scalaire  $H^1(\mathbb{R}^2)$ ,  $\mathcal{V}_\Gamma$  admet une base hilbertienne  $\{e_n\}$ . Soit  $\varphi_{n,m} \in V(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)$  une suite de fonctions tendant vers  $e_n$  dans  $H^1(\mathbb{R}^2)$  quand  $m \rightarrow \infty$ . La famille  $\{\varphi_{n,m}\}$  est dénombrable, et l'espace vectoriel engendré par cette famille est dense dans  $\mathcal{V}_\Gamma$ . Par Gram-Schmidt, nous pouvons donc conclure qu'il existe une base hilbertienne  $\{\tilde{e}_n\}$  de  $\mathcal{V}_\Gamma$  avec  $\tilde{e}_n \in V(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)$ . Si  $f \in C_c^\infty((0, T); \mathcal{V})$ , nous pouvons écrire  $f = \sum \alpha_n(t) \tilde{e}_n(x)$  avec  $\alpha_n \in C_c^\infty((0, T))$ , et nous choisissons

$$f_N = \sum_{n=0}^N \alpha_n(t) \tilde{e}_n(x).$$

Ces fonctions appartiennent à  $C_c^\infty((0, T) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma))$ . De plus,  $g_n(t) = \|f(\cdot, t) - f_n(\cdot, t)\|_{H^1}^2$  appartient à  $L^1([0, T])$  (car  $\|g_n\|_{L^1} \leq 4(\|f\|_{L^2([0, T], H^1)})^2$ ), et pour chaque  $t \in [0, T]$ ,  $\{g_n(t)\}$  est une suite décroissante qui tend vers zéro. Par le théorème de Beppo Levi,  $g_n$  tend vers zéro dans  $L^1([0, T])$ , ce qui signifie que  $f_n$  converge vers  $f$  dans  $L^2([0, T], H^1(\mathbb{R}^2))$ .  $\square$

## 4.4 Passage à la limite

Nous allons montrer dans cette partie que  $\{Eu^\varepsilon\}$  converge vers une solution de Navier-Stokes sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  dans le sens des distributions. Il suffit de trouver une convergence forte de la suite  $\{Eu^\varepsilon\}$  dans  $L^2_{\text{loc}}([0, \infty) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma))$ .

**Proposition 4.4.1.** *Soient  $T > 0$  et  $O$  un ouvert régulier, relativement compact de  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ . Alors, la suite  $\{Eu^\varepsilon\}$  est précompacte dans  $L^\infty([0, T]; H^{-3}(O))$ .*

*Démonstration.* Montrons que la famille  $\{Eu^\varepsilon\}$  est bornée dans  $L^\infty([0, T]; L^2(O))$  et équicontinue comme fonction de  $[0, T]$  dans  $H^{-2}(O)$ , ce qui nous permettra d'appliquer le théorème d'Arzela-Ascoli. Soit  $\Phi$  un champ de vecteurs régulier à divergence nulle, à support compact dans  $O$ . Comme l'obstacle se contracte vers la courbe  $\Gamma$ , il existe  $\varepsilon_O > 0$  tel que  $\Omega_\varepsilon \cap \overline{O} = \emptyset$  pour tout  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_O$  (voir le lemme 2.1.9). Pour tout intervalle  $(t_1, t_2) \subset [0, T]$ , en utilisant (4.1.2) nous constatons que

$$\begin{aligned} \langle Eu^\varepsilon(t_2) - Eu^\varepsilon(t_1), \Phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} (Eu^\varepsilon(t_2) - Eu^\varepsilon(t_1)) \Phi dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left( \int_{t_1}^{t_2} \partial_t Eu^\varepsilon dt \right) \Phi dx \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^2} Eu^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon \Phi dx dt \\ &\quad - \nu \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u^\varepsilon \nabla \Phi dx dt \\ &\equiv I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Estimons tout d'abord  $I_1$ . En se servant du théorème 4.3.5, nous déduisons que

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \|Eu^\varepsilon\|_{L^\infty([0, T]; L^2(O))} \|\nabla Eu^\varepsilon\|_{L^2([0, T]; L^2(O))} \|\Phi\|_{L^\infty} \sqrt{|t_2 - t_1|} \\ &\leq C \|\Phi\|_{H^2} \sqrt{|t_2 - t_1|}, \end{aligned}$$

grâce à l'injection de Sobolev  $H^2(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Traitons maintenant  $I_2$  :

$$|I_2| \leq \nu \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2([0, T]; L^2(O))} \|\nabla \Phi\|_{L^2} \sqrt{|t_2 - t_1|} \leq C \|\Phi\|_{H^2} \sqrt{|t_2 - t_1|}.$$

L'inégalité précédente montre que la famille  $\{Eu^\varepsilon\}$  est équicontinue comme famille de fonctions dans  $H^{-2}(O)$ .

Comme  $\{Eu^\varepsilon\}$  est borné dans  $L^\infty([0, T]; L^2(O))$  par le théorème 4.3.5, il suit du théorème d'Arzela-Ascoli qu'il existe une sous-suite de  $Eu^\varepsilon$  qui converge fortement dans  $L^\infty([0, T]; H^{-3}(O))$ .  $\square$

Nous allons dans le prochain lemme améliorer le résultat de compacité de la proposition précédente.

**Lemme 4.4.2.** *Il existe une sous-suite telle que  $\{Eu^\varepsilon\}$  converge fortement dans  $L^2_{\text{loc}}([0, \infty) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma))$ .*

*Démonstration.* Nous savons grâce au théorème 4.3.5 que  $\{Eu^\varepsilon\}$  est borné dans  $L^2([0, T]; H^1(O))$ , et la proposition 4.4.1 établit que  $\{Eu^\varepsilon\}$  est pré-compact dans  $L^\infty([0, T]; H^{-3}(O))$ . Par interpolation, nous pouvons donc affirmer qu'il existe une sous-suite telle que  $\{Eu^\varepsilon\}$  converge fortement dans  $L^2([0, T] \times O)$ . En prenant une extraction diagonale sur l'ensemble des compacts de  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ , ainsi que sur le temps, nous obtenons une sous-suite qui converge fortement dans  $L^2_{\text{loc}}([0, \infty) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma))$ .  $\square$

L'objectif de ce qui suit est donc de vérifier que le champ limite trouvé ci-dessus vérifie les équations de Navier-Stokes à l'extérieur d'une courbe, dans un sens faible adéquat. Le problème est que  $Eu^\varepsilon$  n'appartient pas à  $L^2(\mathbb{R}^2)$ . Il faut donc, comme nous avons fait dans le corollaire 4.3.6, conserver la partie harmonique  $v^\varepsilon$ . Puisque nous avons obtenu une limite pour  $Eu^\varepsilon$ , nous allons maintenant étudier la limite de  $v^\varepsilon$ . Rappelons que  $v^\varepsilon = \alpha H_\varepsilon \Phi^{\varepsilon, \lambda}$ , avec  $H_\varepsilon$  et  $\Phi^{\varepsilon, \lambda}$  donnés dans (2.2.5) et (2.2.10). Nous définissons aussi  $H$  et  $\Phi^{0, \lambda}$  comme  $H^\varepsilon$  et  $\Phi^{\varepsilon, \lambda}$  en remplaçant  $T_\varepsilon$  par  $T$ .

**Lemme 4.4.3.** *Si nous notons  $v \equiv \alpha H \Phi^{0, \lambda}$ , alors  $v_\varepsilon \rightarrow v$  dans  $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ .*

*Démonstration.* Pour tout compact  $K$  de  $\mathbb{R}^2$ , nous utilisons les formes explicites de  $v^\varepsilon$  et  $v$  pour écrire

$$\begin{aligned} \|v^\varepsilon - v\|_{L^2(K)} &= \frac{\alpha}{2\pi} \left\| \Phi^{\varepsilon, \lambda} \left( DT_\varepsilon^t \frac{T_\varepsilon^\perp}{|T_\varepsilon|^2} - DT^t \frac{T^\perp}{|T|^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + (\Phi^{\varepsilon, \lambda} - \Phi^{0, \lambda}) \left( DT^t \frac{T^\perp}{|T|^2} \right) \right\|_{L^2(K)} \\ &\leq \frac{\alpha}{2\pi} \left\| \Phi^{\varepsilon, \lambda} \left( DT_\varepsilon^t \frac{T_\varepsilon^\perp}{|T_\varepsilon|^2} - DT^t \frac{T^\perp}{|T|^2} \right) \right\|_{L^2(K)} \\ &\quad + \frac{\alpha}{2\pi} \|\Phi^{\varepsilon, \lambda} - \Phi^{0, \lambda}\|_{L^\infty} \|DT^t\|_{L^2(K)}. \end{aligned}$$

En rappelant que  $\Phi^{\varepsilon, \lambda}$  s'annule sur une boule de rayon  $C_1 \lambda$  ( $C_1$  indépendant de  $\varepsilon$ ), grâce à l'hypothèse 2.1.6 (iii) et la remarque 2.1.7, nous concluons que le premier terme tend vers zéro. Pour le second terme, nous remarquons que la fonction troncature  $\Phi$  est lipschitzienne et en se rappelant de la forme explicite de  $\Phi^{\varepsilon, \lambda}$  donnée dans (2.2.10) nous en déduisons que

$$|\Phi^{\varepsilon, \lambda}(x) - \Phi^{0, \lambda}(x)| \leq (\sup |\Phi'|) \left| \frac{|T_\varepsilon(x)| - |T(x)|}{\lambda} \right|.$$

Sur l'anneau (choisi indépendant de  $\varepsilon$ ) où  $\Phi^{\varepsilon, \lambda} - \Phi^{0, \lambda}$  n'est pas nul, le terme précédent tend donc vers zéro par la remarque 2.1.7.  $\square$

Nous pouvons enfin formuler précisément ce que nous appelons solution faible de l'équation de Navier-Stokes.

**Définition 4.4.4.** Soit  $u_0$  tel que  $u_0 - v \in \mathcal{H}_\Gamma$ . Nous disons que  $u$  est une solution faible de l'équation de Navier-Stokes incompressible sur  $\mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)$  avec vitesse initiale  $u_0$  si et seulement si  $u - v$  appartient à l'espace

$$C([0, \infty); \mathcal{H}_\Gamma) \cap L_{\text{loc}}^2([0, \infty); \mathcal{V}_\Gamma)$$

et si pour tout champ vectoriel test à divergence nulle  $\psi \in C_c^\infty((0, \infty) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma))$ , le champ de vitesse  $u$  vérifie :

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma} (u \cdot \psi_t + [(u \cdot \nabla)\psi] \cdot u + \nu u \cdot \Delta \psi) dx dt = 0. \quad (4.4.1)$$

De plus,  $\text{div } u = 0$  au sens des distributions et  $u(\cdot, t) \rightharpoonup u_0$  au sens des distributions quand  $t \rightarrow 0^+$ .

*Remarque 4.4.5.* En fait, si nous prouvons que le champ de vecteurs  $u$  vérifie (4.4.1) pour tout champ vectoriel test à divergence nulle  $\psi \in C_c^\infty((0, \infty) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma))$ , avec  $u - v$  appartenant à  $L_{\text{loc}}^2([0, \infty); \mathcal{V}_\Gamma) \cap L_{\text{loc}}^\infty([0, \infty); \mathcal{H}_\Gamma)$  alors

$$\partial_t u \in L_{\text{loc}}^2([0, \infty); \mathcal{V}'_\Gamma). \quad (4.4.2)$$

En effet, avec le lemme 4.3.2 et l'inégalité d'interpolation

$$\|u - v\|_{L^4(L^4)} \leq C \|u - v\|_{L^\infty(L^2)}^{1/2} \|\nabla(u - v)\|_{L^2(L^2)}^{1/2},$$

ce qui nous permet de remarquer que  $u$  appartient à  $L_{\text{loc}}^4([0, \infty); L^4(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma))$  et que  $\nabla u$  appartient à  $L_{\text{loc}}^2([0, \infty); L^2(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma))$ . Pour tout  $T > 0$ , en utilisant (4.4.1) et le théorème 4.3.5 pour chaque fonction à divergence nulle  $\psi \in C_c^\infty((0, T) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma))$ , nous avons

$$\begin{aligned} \langle \partial_t u, \psi \rangle &\leq (\|u\|_{L^4((0, T); L^4)}^2 + \nu \|\nabla u\|_{L^2((0, T); L^2)}) \|\nabla \psi\|_{L^2((0, T); L^2)} \\ &\leq C \|\psi\|_{L^2((0, T); \mathcal{V}_\Gamma)} \end{aligned}$$

avec  $C$  une constante positive. Comme l'ensemble des fonctions à divergence nulle appartenant à  $C_c^\infty((0, T) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma))$  est dense dans  $L^2([0, T], \mathcal{V}_\Gamma)$  (voir la proposition 4.3.7), la forme linéaire  $\psi \mapsto \int \int \partial_t u \cdot \psi$  est bornée dans  $L^2([0, T], \mathcal{V}_\Gamma)$ , et nous déduisons (4.4.2).

**Théorème 4.4.6.** *Il existe une limite forte  $u$  de  $\{Eu^\varepsilon\}$  dans  $L^2_{\text{loc}}([0, \infty) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma))$  qui est une solution faible des équations de Navier-Stokes dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ , au sens donné par la définition 4.4.4, avec une vitesse initiale  $u_0 = K[\omega_0] + \alpha H$ .*

*Démonstration.* Par les lemmes 4.2.2 et 4.4.3, nous savons que  $Eu_0^\varepsilon - v^\varepsilon \rightarrow u_0 - v$  dans  $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ . Or d'après le théorème 4.3.5,  $u_0 - v$  est bien dans  $L^2$ . De plus,  $Eu_0^\varepsilon - v^\varepsilon$  est à support inclus dans un domaine régulier  $(\Pi_\varepsilon)$ , ce qui est donc approchable par des fonctions dans  $V_\Gamma$ . Par extraction diagonale, nous obtenons bien que  $u_0 - v \in \mathcal{H}_\Gamma$ .

Soit  $\psi \in C_c^\infty((0, \infty) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma))$ , tel que  $\text{div } \psi = 0$ . Si nous considérons  $\varepsilon$  assez petit pour que le support de  $\psi$  n'intersecte pas  $\Omega_\varepsilon$ , nous pouvons écrire les intégrales sur  $\Pi_\varepsilon$  comme des intégrales sur tout le plan, puis en utilisant l'opérateur d'extension et en multipliant (4.1.2) par  $\psi$ , nous obtenons la relation suivante :

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma} (Eu^\varepsilon \cdot \psi_t + [(Eu^\varepsilon \cdot \nabla)\psi] \cdot Eu^\varepsilon + \nu Eu^\varepsilon \cdot \Delta \psi) dx dt = 0.$$

Grâce à la convergence de  $Eu^\varepsilon$  vers un champ de vecteurs  $u$  dans  $L^2_{\text{loc}}([0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)$  (voir le lemme 4.4.2), nous pouvons passer à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  et obtenir que  $u$  satisfasse (4.4.1).

Or,  $v^\varepsilon$  tend vers  $v$  (Lemme 4.4.3), et en passant à une sous-suite si besoin, le corollaire 4.3.6 implique que  $u - v$  appartient à  $L^2_{\text{loc}}([0, \infty); \mathcal{V}_\Gamma) \cap L^\infty_{\text{loc}}([0, \infty); \mathcal{H}_\Gamma)$ . La condition d'incompressibilité est une conséquence de la convergence forte des champs de vecteurs à divergence nulle (lemme 4.4.2).

Démontrons maintenant que  $u - v$  appartient à  $C([0, \infty); \mathcal{H}_\Gamma)$ . Nous savons d'après le corollaire 4.3.6 que  $u - v$  appartient à  $L^2([0, T]; \mathcal{V}_\Gamma)$  et d'après la remarque 4.4.5 que la dérivée  $\partial_t(u - v)$  appartient à  $L^2([0, T]; \mathcal{V}'_\Gamma)$ . Comme  $\mathcal{V}_\Gamma \hookrightarrow \mathcal{H}_\Gamma \equiv \mathcal{H}'_\Gamma \hookrightarrow \mathcal{V}'_\Gamma$ , alors le lemme 1.2 du chapitre III de [34] (voir aussi le théorème d'interpolation de Lions-Magenes [22]) nous permet d'affirmer que  $u - v$  est égal presque partout à une fonction continue de  $[0, T]$  dans  $\mathcal{H}_\Gamma$  et nous obtenons l'égalité suivante sur  $(0, T)$ , dans le sens des distributions en temps :

$$\frac{d}{dt}|u - v|^2 = 2\langle \partial_t(u - v), u - v \rangle. \quad (4.4.3)$$

Et donc,  $u - v \in C([0, \infty); \mathcal{H}_\Gamma)$ .

Pour finir, puisque  $Eu^\varepsilon$  converge vers  $u$  uniformément en temps à valeur dans  $H^{-3}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)$  (par la proposition 4.4.1), nous avons que  $Eu_0^\varepsilon$  converge vers  $u_{t=0}$  dans  $H^{-3}_{\text{loc}}$ . Or, le lemme 4.2.2 établit que  $Eu_0^\varepsilon$  converge vers  $K[\omega_0] + \alpha H$  dans  $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ . Par unicité de la limite dans  $H^{-3}_{\text{loc}}$ , nous concluons que  $u_0 = K[\omega_0] + \alpha H$ , ce qui termine la preuve.  $\square$



## 4.5 Unicité du problème limite

Nous établissons dans cette partie le résultat d'unicité qui complètera le théorème 4.4.6.

**Proposition 4.5.1.** *Il existe au plus une solution globale des équations de Navier-Stokes sur l'extérieur d'une courbe, au sens donné par la définition 4.4.4, ayant pour vitesse initiale  $u_0 = K[\omega_0] + \alpha H$ .*

*Démonstration.* Soient  $u_1$  et  $u_2$  deux solutions globales des équations de Navier-Stokes autour de la courbe  $\Gamma$  avec la même donnée initiale  $u_0 = K[\omega_0] + \alpha H$ . Par la remarque 4.4.5, nous avons que  $\partial_t u_i$  appartient à  $L^2_{\text{loc}}([0, \infty), \mathcal{V}'_\Gamma)$ , pour  $i = 1, 2$ .

Si nous notons  $\tilde{u} = u_1 - u_2$ , alors d'après la proposition 4.3.7, pour  $T > 0$  fixé, il existe une famille  $\{\psi_n\}$  de fonctions à divergence nulle appartenant à  $C_c^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)$  telle que  $\psi_n \rightarrow \tilde{u}$  dans  $L^2([0, T]; \mathcal{V}_\Gamma)$ .

En faisant la différence des équations satisfaites par  $u_1$  et  $u_2$ , et en multipliant par la fonction test  $\psi_n$ , nous voyons que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma} \partial_t \tilde{u} \cdot \psi_n \, dx \, dt - \nu \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma} \tilde{u} \cdot \Delta \psi_n \, dx \, dt \\ = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma} ([(\tilde{u} \cdot \nabla) \psi_n] \cdot u_1 + [(u_2 \cdot \nabla) \psi_n] \cdot \tilde{u}) \, dx \, dt. \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

En utilisant l'inégalité d'interpolation  $\|u^\varepsilon\|_{L^4(L^4)} \leq C \|u^\varepsilon\|_{L^\infty(L^2)}^{1/2} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(L^2)}^{1/2}$ , le terme de droite peut être borné par

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\tilde{u}\|_{L^4} (\|u_1\|_{L^4} + \|u_2\|_{L^4}) \|\nabla \psi_n\|_{L^2} \\ \leq C \int_0^T \|\nabla \psi_n\|_{L^2} \|\nabla \tilde{u}\|_{L^2}^{1/2} \|\tilde{u}\|_{L^2}^{1/2} (\|u_1\|_{L^4} + \|u_2\|_{L^4}) \\ \leq \frac{\nu}{2} \int_0^T \|\nabla \psi_n\|_{L^2}^2 + \frac{\nu}{2} \int_0^T \|\nabla \tilde{u}\|_{L^2}^2 \\ + C_1 \int_0^T \|\tilde{u}\|_{L^2}^2 (\|u_1\|_{L^4}^4 + \|u_2\|_{L^4}^4), \end{aligned}$$

avec  $C$  et  $C_1$  des constantes indépendantes de  $T$ . Pour le terme de gauche,

grâce à (4.4.3) et parce que  $\tilde{u}(\cdot, 0) = 0$ , nous écrivons que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma} \partial_t \tilde{u} \cdot \psi_n \, dx \, dt &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma} \partial_t \tilde{u} \cdot \tilde{u} \, dx \, dt \\
&\quad + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma} \partial_t \tilde{u} \cdot (\psi_n - \tilde{u}) \, dx \, dt \\
&= \frac{1}{2} \|\tilde{u}(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\
&\quad + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma} \partial_t \tilde{u} \cdot (\psi_n - \tilde{u}) \, dx \, dt.
\end{aligned}$$

La dernière intégrale double tend vers zéro quand  $n \rightarrow \infty$  car  $\partial_t \tilde{u}$  appartient à  $L_{\text{loc}}^2([0, \infty); \mathcal{V}'_\Gamma)$  et  $\psi_n$  converge vers  $\tilde{u}$  dans  $L^2([0, T]; \mathcal{V}_\Gamma)$ .

De la même manière, nous avons que

$$\begin{aligned}
-\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma} \tilde{u} \cdot \Delta \psi_n \, dx \, dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla \psi_n \, dx \, dt \\
&= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{u} \, dx \, dt \\
&\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma} \nabla \tilde{u} \cdot (\nabla \psi_n - \nabla \tilde{u}) \, dx \, dt \\
&= \|\nabla \tilde{u}\|_{L^2([0, T], L^2(\mathbb{R}^2))}^2,
\end{aligned}$$

car  $\nabla \tilde{u}$  appartient à  $L^2([0, T]; \mathcal{H}_\Gamma)$  et  $\nabla \psi_n$  converge vers  $\nabla \tilde{u}$  dans  $L^2([0, T]; \mathcal{H}_\Gamma)$ . Cette convergence implique aussi que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\nabla \psi_n\|_{L^2([0, T] \times \mathbb{R}^2)}^2 = \|\nabla \tilde{u}\|_{L^2([0, T] \times \mathbb{R}^2)}^2.$$

Par conséquence, en passant à la limite  $n \rightarrow \infty$  dans (4.5.1), nous obtenons

$$\|\tilde{u}(\cdot, T)\|_{L^2}^2 \leq 2C_1 \int_0^T \|\tilde{u}\|_{L^2}^2 (\|u_1\|_{L^4}^4 + \|u_2\|_{L^4}^4) \, dt.$$

Cette dernière égalité est vérifiée pour tout  $T > 0$ , avec  $C_1$  une constante indépendante de  $T$ . En notant que les fonctions  $t \mapsto \|\tilde{u}(\cdot, t)\|_{L^2}^2$ ,  $t \mapsto (\|u_1(\cdot, t)\|_{L^4}^4 + \|u_2(\cdot, t)\|_{L^4}^4)$ , et  $t \mapsto \|\tilde{u}(\cdot, t)\|_{L^2}^2 (\|u_1(\cdot, t)\|_{L^4}^4 + \|u_2(\cdot, t)\|_{L^4}^4)$  sont  $L_{\text{loc}}^1$ , nous appliquons le lemme de Gronwall pour affirmer que

$$\|\tilde{u}(\cdot, T)\|_{L^2}^2 \leq 0,$$

ce qui conclut la preuve de l'unicité.  $\square$

Sachant que nous avons établi l'unicité des solutions d'une telle équation, et que nous avons par le théorème 4.4.6 prouvé que pour chaque suite de solutions  $u^\varepsilon$ , nous pouvions extraire une sous-suite convergeant dans  $L^2_{\text{loc}}([0, \infty) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma))$ , nous déduisons par un argument standard que la convergence forte dans  $L^2_{\text{loc}}([0, \infty) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma))$  est vraie sans avoir besoin d'extraire de sous-suite. Le théorème 4.1.1 est alors totalement démontré.

# Chapitre 5

## Navier-Stokes en dimension trois

### Résumé

Dans [11], les auteurs ont étudié le comportement des solutions des équations de Navier-Stokes en dimension trois autour d'un obstacle qui se contracte vers un point. Nous étudions dans cette partie le cas où l'obstacle se contracte vers une surface ou une courbe. La différence avec la dimension deux est que les outils puissants de l'analyse complexe ne sont plus disponibles.

La première partie est incluse dans l'article *Three Dimensional Incompressible Viscous Flow Around a Thin Obstacle Tending to a Surface*, en élaboration.

## 5.1 Introduction

Nous regardons dans cette partie le comportement des fluides visqueux en dimension trois autour d'obstacles fins. Iftimie et Kelliher ont travaillé dans [11] sur le cas où l'obstacle se contracte vers un point, et ils ont montré que nous retrouvons à la limite les équations de Navier-Stokes sur tout l'espace, comme s'il n'y avait jamais eu d'obstacle. Nous travaillons ici sur le cas où l'obstacle  $\Omega_\varepsilon$  se contracte vers une surface  $S$  dans le sens suivant : soit  $\Pi_\varepsilon = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon$  un domaine extérieur simplement connexe avec un bord  $\mathbb{C}^\infty$  tel qu'il existe  $M > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\Omega_\varepsilon \subset S + B(0, M\varepsilon)$ . Ceci implique par exemple, que pour tout  $K$  compact de  $\Pi \equiv \mathbb{R}^3 \setminus S$ , il existe  $\varepsilon_K > 0$  tel que pour tout  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_K$ ,  $K \cap \Omega_\varepsilon = \emptyset$ . Nous montrons tout d'abord que la donnée initiale converge vers un champ tangent à la surface, et nous prouvons ensuite que la solution converge vers la solution de Navier-Stokes à l'extérieur de la surface. Nous regardons dans une seconde partie, le cas où l'obstacle converge vers une courbe, mais nous arrivons seulement à montrer que la donnée initiale converge vers  $u_0$  (défini dans (5.1.4)) comme s'il n'y avait pas d'obstacle. Il serait aisé de montrer que la vitesse limite est une sorte de solution faible des équations de Navier-Stokes à l'extérieur de la courbe, mais nous ne sommes pas sûrs quel sens donner à cette notion. En effet le sens du théorème de [11] est que les solutions de Leray des équations de Navier-Stokes tri-dimensionnelles à l'extérieur d'un point sont des solutions des équations de Navier-Stokes dans tout l'espace ; en ce sens un point est une singularité artificielle pour les équations de Navier-Stokes. Ceci n'est évidemment pas le cas pour une surface car les solutions à l'extérieur d'une surface doivent s'annuler sur la surface et elles n'ont donc aucune raison d'être des solutions dans  $\mathbb{R}^3$  tout entier. Une question très intéressante serait de savoir si la courbe est une singularité artificielle ou pas. Nous regardons pour finir le cas où  $S$  est le plan  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ , car dans ce cas, nous trouvons une forme explicite de la limite de la donnée initiale.

Comme dans les autres problèmes, nous nous donnons un tourbillon initial régulier à divergence nulle  $\omega_0$  dont le support compact est à l'extérieur des obstacles  $\Omega_\varepsilon$ . Nous considérons alors une solution faible de Leray des équations de Navier-Stokes sur  $\Pi_\varepsilon \equiv \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\varepsilon$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u^\varepsilon - \nu \Delta u^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon = -\nabla p^\varepsilon & \text{dans } \Pi_\varepsilon \times (0, \infty) \\ \operatorname{div} u^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Pi_\varepsilon \times [0, \infty) \\ u^\varepsilon = 0 & \text{dans } \partial\Pi_\varepsilon \times (0, \infty) \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |u^\varepsilon| = 0 & \text{pour } t \in [0, \infty) \\ \operatorname{rot} u^\varepsilon(x, 0) = \omega_0(x) & \text{dans } \Pi_\varepsilon \end{array} \right. \quad (5.1.1)$$

Avant de préciser ce que veut dire exactement solution de Leray, introduisons quelques notations. Pour une fonction  $f$  définie sur  $\Pi_\varepsilon$  nous notons par  $Ef$  le prolongement de  $f$  sur  $\mathbb{R}^3$ , tel qu'il vaut  $f$  sur  $\Pi_\varepsilon$  et zéro ailleurs. Si  $f$  est assez régulier, et qu'il s'annule sur le bord  $\partial\Omega_\varepsilon$ , alors  $\nabla(Ef) = E(\nabla f)$ . De même, si  $v$  est un champ de vecteurs assez régulier et tangent au bord, alors  $\operatorname{div} Ev = E(\operatorname{div} v)$ . Nous notons de plus par  $H_\varepsilon$  l'espace des champs vectoriels sur  $\Pi_\varepsilon$  de carré intégrable, à divergence nulle et tangents au bord. Nous pouvons alors définir les solutions faibles de Leray.

**Définition 5.1.1.** Soit  $u_0^\varepsilon \in H_\varepsilon$ . Nous disons que  $u^\varepsilon$  est une solution faible de (5.1.1) si

$$u^\varepsilon \in C_w^0([0, \infty); H_\varepsilon) \cap L^\infty([0, \infty); H_\varepsilon) \cap L_{\text{loc}}^2([0, \infty); H_0^1(\Pi_\varepsilon))$$

vérifie l'équation au sens des distributions, c'est à dire si

$$\int_0^\infty \int_{\Pi_\varepsilon} (-u^\varepsilon \cdot \psi_t + \nu \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla \psi + u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon \cdot \psi) dx dt = \int_{\Pi_\varepsilon} v_0 \cdot \psi(0) \quad (5.1.2)$$

pour tout champ vectoriel test à divergence nulle  $\psi \in C_c^\infty([0, \infty) \times \Pi_\varepsilon)$ , et si elle vérifie de plus l'inégalité d'énergie :

$$\|u^\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^2(\Pi_\varepsilon)}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla u^\varepsilon(\cdot, s)\|_{L^2(\Pi_\varepsilon)}^2 ds \leq \|u_0^\varepsilon\|_{L^2(\Pi_\varepsilon)}^2, \quad \forall t \geq 0. \quad (5.1.3)$$

L'existence d'une telle solution est bien connue (voir par exemple [9]).

Nous notons aussi par  $\mathcal{H}_S$  et  $\mathcal{V}_S$  les espaces définis par densité de la même manière que dans la définition 4.3.1.

Rappelons de plus que pour un tourbillon  $\omega_0$  donné, il existe un seul champ vectoriel  $u_0^\varepsilon \in H_\varepsilon$  tel que  $\operatorname{rot} u_0^\varepsilon = \omega_0$  (voir [11] par exemple). Ceci est vrai car  $\Pi_\varepsilon$  est simplement connexe.

Rappelons enfin la loi de Biot-Savart dans l'espace entier, qui relie le champ de vitesse au tourbillon associé  $\omega_0$  sur  $\mathbb{R}^3$  :

$$u_0(x) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{x - y}{4\pi|x - y|^3} \times \omega_0(y) dy, \quad (5.1.4)$$

où  $\times$  représente le produit vectoriel dans  $\mathbb{R}^3$ . A l'inverse de la dimension deux, nous n'avons plus de forme explicite de la loi de Biot-Savart sur les domaines extérieurs, si ce n'est dans la dernière partie où nous travaillons à l'extérieur du plan.

Pour finir cette introduction, nous allons remarquer que le rotationnel d'un champ tangent à une surface possède une masse de Dirac supportée

sur cette surface. Plus précisément, comme dans la sous-partie 3.3.2 nous définissons la composante du “dessus” et du “dessous”. Si nous posons  $n$  le vecteur normal orienté vers le “dessus” et  $v_0 = (v_{0,1}, v_{0,2}, v_{0,3})$ , alors nous notons  $v_{0,\pm}(x) = \lim_{s \rightarrow 0} v_0(x \pm s n)$ ,  $\forall x \in S$ . Si  $S$  est une surface régulière et si  $v_0$  est un champ tangent à la surface, continu jusqu’au bord mais avec des valeurs différentes de chaque côté, tel que

$$\operatorname{div} v_0 = 0 \text{ et } \operatorname{rot} v_0 = \omega \text{ sur } \mathbb{R}^3 \setminus S$$

avec  $\omega \in L^\infty$ , alors

$$\operatorname{div} v_0 = 0 \text{ et } \operatorname{rot} v_0 = \omega + f \delta_S \text{ sur } \mathbb{R}^3,$$

avec  $f = (v_{0,-} - v_{0,+}) \times n$ .

En ce qui concerne la divergence, ceci viendra du fait que nous considérons des champs  $v_0$  qui sont des limites  $L^2$  de champs à divergence nulle, tangents à  $\Omega_\varepsilon$ . Du coup,  $\operatorname{div}(Eu_0^\varepsilon) = E \operatorname{div} u_0^\varepsilon = 0$ . Pour montrer l’égalité concernant le rotationnel, nous procédons de la même manière que dans la preuve du lemme 3.3.8.

## 5.2 Extérieur de la surface

Nous nous donnons donc  $S$  une surface régulière bornée de l’espace, dont le bord  $\Gamma$  est régulier, et tel que  $\Pi \equiv \mathbb{R}^3 \setminus S$  est un domaine extérieur simplement connexe. Nous supposons que  $\Pi_\varepsilon = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon$  est aussi un domaine extérieur simplement connexe avec un bord  $C^\infty$  tel que  $\Omega_\varepsilon$  converge vers  $S$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  dans le sens donné dans l’introduction précédente. Etudions alors dans le sous-chapitre suivant la convergence des données initiales.

### 5.2.1 Convergence de la donnée initiale

Comme dans tous les autres problèmes, nous avons comme donnée initiale un tourbillon régulier  $\omega_0$  dont le support est compact et disjoint de la surface  $S$ . Vu la définition de convergence des obstacles vers la surface, il existe  $\varepsilon_0$  tel que le support de  $\omega_0$  est disjoint des obstacles  $\Omega_\varepsilon$  pour tout  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ . Comme  $\Pi_\varepsilon$  est simplement connexe, nous savons qu’il existe un unique champ  $u_0^\varepsilon \in H_\varepsilon$  tel que  $\operatorname{rot} u_0^\varepsilon = \omega_0|_{\Pi_\varepsilon}$  (voir la proposition 6 de [11] par exemple). Nous allons montrer la convergence forte dans  $L^2$  de  $u_0^\varepsilon$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Proposition 5.2.1.** *Il existe un champ à divergence nulle  $v_0 \in \mathcal{H}_S$  tel que  $Eu_0^\varepsilon \rightarrow v_0$  fortement dans  $L^2(\mathbb{R}^3 \setminus S)$  et que  $\operatorname{rot} v_0 = \omega_0$  (dans  $\mathbb{R}^3 \setminus S$ ). De plus,  $v_0 = \mathbb{P}_{\mathbb{R}^3 \setminus S}(u_0)$ , avec  $u_0$  défini dans (5.1.4) et  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}^3 \setminus S}$  le projecteur de Leray dans  $\mathbb{R}^3 \setminus S$ .*

*Démonstration.* Soit  $v_0 = \mathbb{P}_{\mathbb{R}^3 \setminus S}(u_0)$  la projection de Leray de  $u_0$  (défini dans (5.1.4)) dans  $\mathbb{R}^3 \setminus S$ . Par le théorème 1.1 p. 107 dans [5], nous savons que  $u_0|_{\mathbb{R}^3 \setminus S} - v_0$  est un gradient et donc  $\text{rot } v_0 = \text{rot } u_0|_{\mathbb{R}^3 \setminus S} = \omega_0$ . Par un raisonnement similaire, nous aurons que  $\mathbb{P}_{\Pi_\varepsilon} v_0$  est un champ de vecteur de  $H_\varepsilon$  de rotationnel  $\omega_0$ . Un tel champ est uniquement déterminé (voir [11] par exemple) nous en déduisons que  $u_0^\varepsilon = \mathbb{P}_{\Pi_\varepsilon} v_0$  c'est à dire la projection orthogonale  $L^2$  de  $v_0|_{\Pi_\varepsilon}$  sur  $H_\varepsilon$ . Nous avons donc que la norme  $L^2$  de  $Eu_0^\varepsilon$  est bornée par celle de  $v_0$ . Ceci signifie qu'il existe un champ  $w_0 \in L^2(\mathbb{R}^3 \setminus S)$  tel que  $Eu_0^\varepsilon \rightarrow w_0$  faiblement dans  $L^2(\mathbb{R}^3 \setminus S)$ , à une sous-suite près. Comme  $Eu_0^\varepsilon$  appartient à  $\mathcal{H}_S$ ,  $w_0$  est bien dans  $\mathcal{H}_S$  et tel que  $\text{rot } w_0 = \omega_0 = \text{rot } v_0$  sur  $\mathbb{R}^3 \setminus S$ . Comme  $\mathbb{R}^3 \setminus S$  est simplement connexe, il existe  $p$  tel que  $v_0 - w_0 = \nabla p$ . Nous avons donc que  $\nabla p$  appartient à la fois à  $\mathcal{H}_S$  et au sous-espace des champs de vecteurs  $L^2$  qui sont des gradients. Ces deux espaces étant orthogonaux, il vient que  $\nabla p = 0$  et donc que  $w_0 = v_0$ . Par unicité de la limite nous déduisons que toute la suite  $Eu_0^\varepsilon$  converge faiblement dans  $L^2$  vers  $v_0$ . Finalement,

$$\|Eu_0^\varepsilon\|_{L^2} \leq \|v_0\|_{L^2} \leq \liminf \|Eu_0^\varepsilon\|_{L^2}$$

ce qui prouve que  $\|Eu_0^\varepsilon\|_{L^2} \rightarrow \|v_0\|_{L^2}$ . Nous nous servons alors une dernière fois de la convergence faible dans  $L^2(\mathbb{R}^3 \setminus S)$  de  $Eu_0^\varepsilon$  vers  $v_0$  pour conclure à la convergence forte dans  $L^2(\mathbb{R}^3 \setminus S)$ .  $\square$

Nous n'avons pas de forme explicite de  $v_0$ . Nous savons juste qu'il est à divergence nulle, de carré intégrable, tangent à la surface et de tourbillon  $\omega_0$ . Nous allons maintenant chercher quelques propriétés sur le comportement de ce champ de vecteurs.

### Remarques sur le comportement de $v_0$

Nous voulons désormais obtenir des estimations sur la vitesse quand nous nous rapprochons de l'obstacle. La première tentative est d'essayer de trouver une forme explicite dans des cas simples pour  $S$  de champ  $v_0$  vérifiant la relation précédente. Une résolution par la transformée de Fourier ne donnant rien, nous allons en fait nous ramener aux équations de Laplace et utiliser les travaux déjà réalisés sur ce sujet. En effet, quand nous posons :

$$w = v_0 - u_0,$$

alors  $\text{div } w = \text{rot } w = 0$  et la composante normale à  $S$  de  $w$  est égale à celle de  $u_0$  qui est régulière. Sachant que  $\mathbb{R}^3 \setminus S$  est simplement connexe, et que  $\text{rot } w = 0$  sur  $\Pi$ , il existe une fonction  $p$  telle que  $w = \nabla p$ . Nous cherchons



donc le comportement de  $\nabla p$  près du bord  $S$  quand  $p$  est la solution de l'équation de Laplace avec une condition de Neumann régulière :

$$\begin{cases} \Delta p = 0 & \text{dans } \Pi \\ \frac{\partial p}{\partial n} = -u_0 \cdot n & \text{sur } S. \end{cases}$$

Nous nous servons ici des résultats établis dans [8]. Nous ne démontrons pas rigoureusement ce qui suit, car nous ne pouvons pas exactement appliquer les résultats de [8] pour deux raisons. La première vient du fait que l'auteur considère que l'équation de Laplace avec condition de Neumann correspond à  $\Delta p = f$  et  $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$  sur le bord. Cette version peut s'obtenir en rajoutant à  $p$  une fonction régulière  $\tilde{p}$  telle que  $\frac{\partial \tilde{p}}{\partial n} = u_0 \cdot n$ . La seconde raison vient du fait qu'il considère des domaines polygonaux. Cette difficulté peut être contournée en observant que l'auteur multiplie  $p$  par des fonctions tronquées  $\eta$  et qu'il étudie le comportement quand nous ne voyons pas les autres arêtes. Du coup, quitte à focaliser fortement, nous pouvons considérer que  $S$  correspond à une plaque  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \{0\}$ . Ce genre de discontinuité est bien considéré par l'auteur (voir la remarque sur les coupures, partie 1.7 de [8]). Nous appliquons alors les résultats de la partie 2 de [8] pour remarquer que si nous notons  $(r, \theta)$  les coordonnées cylindriques sur le plan  $(O, y, z)$ , alors

$$p(x, r, \theta) = 2\eta(r) r^{3/2} e^{-xr} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(t)}{r^2 + (x-t)^2} dt \right) + g$$

avec  $\psi \in H^{1/2}$  et  $g \in H^2$ .

En remarquant que  $\int \frac{1}{r^2+t^2} dt = \pi/r$ , alors nous pouvons penser que  $p$  se comporte comme  $\sqrt{r}$ , et nous obtenons alors que la vitesse  $v_0$  est continue jusqu'au bord  $S$ , et explose au bord de  $S$  comme  $1/\sqrt{r}$  ce qui est  $L^p$  pour  $p < 4$  (car  $r$  est la coordonnée polaire dans le plan).

### 5.2.2 Convergence des solutions

Nous n'essayerons pas de trouver une formulation sur  $\mathbb{R}^3$  pour la même raison que nous ne trouvons pas de formulation sur  $\mathbb{R}^2$  dans le chapitre 4 (voir l'introduction générale). Nous cherchons donc une limite forte dans  $L^2$  des  $u^\varepsilon$  vers  $u$  solution de Navier-Stokes à l'extérieur de la surface, avec pour donnée initiale  $v_0$ , dans le sens suivant.

**Définition 5.2.2.** Soit  $v_0$  tel que  $v_0 \in \mathcal{H}_S$ . Nous disons que  $u$  est une solution de Leray de l'équation de Navier-Stokes incompressible sur  $\mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}^3 \setminus S)$  avec pour vitesse initiale  $v_0$  si et seulement si  $u$  appartient à l'espace

$$C_w^0([0, \infty); \mathcal{H}_S) \cap L^\infty([0, \infty); \mathcal{H}_S) \cap L_{\text{loc}}^2([0, \infty); \mathcal{V}_S)$$

et si pour tout champ vectoriel test à divergence nulle  $\psi \in C_c^\infty([0, \infty) \times (\mathbb{R}^3 \setminus S))$ , le champ de vitesse  $u$  vérifie :

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3 \setminus S} (-u \cdot \psi_t + \nu \nabla u \cdot \nabla \psi + u \cdot \nabla u \cdot \psi) dx dt = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus S} v_0 \cdot \psi(0). \quad (5.2.1)$$

De plus,  $\operatorname{div} u = 0$  au sens des distributions et nous avons l'inégalité d'énergie suivante qui est vérifiée :

$$\|u(t)\|_{L^2(\Pi)}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Pi)}^2 \leq \|v_0\|_{L^2(\Pi)}^2 \quad \forall t \geq 0. \quad (5.2.2)$$

Dans toute la suite de cette sous-partie, nous allons donc démontrer le théorème suivant.

**Théorème 5.2.3.** *Avec  $\Omega_\varepsilon$  et  $\omega_0$  vérifiant les hypothèses de cette partie, soit  $u^\varepsilon$  une solution de Leray de l'équation de Navier-Stokes sur  $\Pi_\varepsilon$  telle que  $\operatorname{rot} u_0^\varepsilon = \omega_0$ , alors il existe une sous-suite et un champ vectoriel  $u$  tels que  $u^\varepsilon \rightarrow u$  fortement dans  $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^+ \times \Pi)$  et tel que  $u$  soit une solution de Leray de l'équation de Navier-Stokes à l'extérieur de la surface  $S$  vérifiant  $u(0, \cdot) = v_0$  ( $v_0$  donné dans la sous-partie précédente).*

Par la proposition 5.2.1, nous savons que  $Eu_0^\varepsilon \rightarrow v_0$  dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$ . De plus,  $Eu_0^\varepsilon$  est à support inclus dans un domaine régulier  $(\Pi_\varepsilon)$ , ce qui est donc approchable par des fonctions dans  $V_S$ . Par extraction diagonale, nous obtenons bien que  $v_0 \in \mathcal{H}_S$ .

Nous avons déjà les estimations  $L^\infty([0, \infty); \mathcal{H}_S) \cap L_{\text{loc}}^2([0, \infty); \mathcal{V}_S)$  grâce à (5.1.3). Cherchons une estimation temporelle. Comme nous avons vu que  $\psi$  sera pris à support compact dans  $\Pi$ , nous nous fixons dans un premier temps un ouvert  $O$  relativement compact dans  $\Pi$ . Pour tout  $\Phi \in C_c^\infty(O)$ , nous avons pour  $\varepsilon$  assez petit  $O \cap \Omega_\varepsilon = \emptyset$ , et alors

$$\begin{aligned} |\langle u^\varepsilon(t), \Phi \rangle - \langle u^\varepsilon(s), \Phi \rangle| &= \left| \int_t^s \int_{\Pi} \nu \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla \Phi + u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon \cdot \Phi \right| \\ &\leq (t-s)^{1/2} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^+ \times \Pi_\varepsilon)} (\nu \|\nabla \Phi\|_{L^2} + \|u^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\Pi_\varepsilon))} \|\Phi\|_{L^\infty}) \\ &\leq C(t-s)^{1/2} \|\Phi\|_{H^3}, \end{aligned}$$

ce qui nous permet de dire que la famille  $\{Eu^\varepsilon\}$  est équicontinue comme famille de fonctions du temps dans  $H^{-3}(O)$ . Sachant de plus que cette famille est bornée dans  $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(O))$  nous obtenons par le théorème d'Ascoli que  $\{Eu^\varepsilon\}$  est précompact dans  $L^\infty(\mathbb{R}^+; H^{-4}(O))$ .

Comme  $\{Eu^\varepsilon\}$  est aussi borné dans  $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^+; H^1(O))$ , par interpolation cette famille est aussi précompacte dans  $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^+ \times O)$  et donc, quitte à faire

une extraction diagonale sur l'ensemble des compacts de  $\Pi$ , nous avons la précompacité dans  $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+ \times \Pi)$ .

Il existe donc une sous-suite telle que  $Eu^\varepsilon \rightarrow u$  fortement dans  $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+ \times \Pi)$ . Nous passons alors facilement à la limite dans l'équation de Navier-Stokes vérifiée par  $u^\varepsilon$  en prenant  $\varepsilon$  assez petit pour que le support de la fonction test  $\psi$  n'intersecte pas  $\Omega_\varepsilon$ , et nous obtenons bien que  $u$  vérifie (5.2.1).

Ce champ est de plus à divergence nulle car c'est une limite de champs à divergence nulle.

Vérifions maintenant que  $u$  appartient au bon espace. Quitte à extraire à nouveau une sous-suite, les estimations dues à l'inégalité (5.1.3) nous assurent bien que

$$u \in L^\infty([0, \infty); \mathcal{H}_S) \cap L^2_{\text{loc}}([0, \infty); \mathcal{V}_S).$$

Pour la continuité faible dans  $L^2$ , nous montrons d'abord que  $u(t) \in L^2$  pour tout  $t \geq 0$ . Le théorème d'Ascoli utilisé précédemment nous permet aussi d'affirmer que la famille  $\{Eu^\varepsilon\}$  ainsi que  $u$  appartiennent à  $C^0(\mathbb{R}^+; H^{-4}_{\text{loc}})$ , et donc que  $u(t)$  est définie pour tout temps. Pour  $t$  fixé, l'inégalité d'énergie (5.1.3) nous assure que la suite  $Eu^\varepsilon(t)$  est bornée dans  $L^2$  et comme  $Eu^\varepsilon(t) \rightarrow u(t)$  dans  $H^{-4}_{\text{loc}}$ , la limite  $u(t)$  doit alors appartenir à  $L^2(\mathbb{R}^3)$ .

Nous utilisons encore une fois que  $Eu^\varepsilon(t) \rightarrow u(t)$  dans  $H^{-4}_{\text{loc}}$  pour avoir que  $\int (Eu^\varepsilon(t) - u(t)) \cdot h \rightarrow 0$  pour tout  $h \in C_0^\infty(\Pi)^3$ . Or  $C_0^\infty(\Pi)$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$  et  $Eu^\varepsilon(t)$  est borné dans  $L^2$ , d'où  $\int (Eu^\varepsilon(t) - u(t)) \cdot h \rightarrow 0$  pour tout  $h \in L^2(\mathbb{R}^3)$ . Nous avons donc la convergence faible  $L^2$  de  $Eu^\varepsilon(t)$  vers  $u(t)$  pour tout  $t \geq 0$ . Nous avons de la même manière la convergence faible  $L^2((0, t) \times \mathbb{R}^3)$  de  $\nabla Eu^\varepsilon$  vers  $\nabla u$  pour tout  $t \geq 0$ , ainsi que la continuité faible en temps à valeurs dans  $L^2$ .

Pour terminer cette preuve, montrons enfin l'inégalité d'énergie (5.2.2). Ceci se fait en prenant la liminf de (5.1.3)

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \|Eu^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \|\nabla Eu^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq \|v_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2$$

puis en remarquant que la convergence faible  $L^2$  de  $Eu^\varepsilon(t)$  vers  $u(t)$  et que la convergence faible  $L^2((0, t) \times \mathbb{R}^3)$  de  $\nabla Eu^\varepsilon$  vers  $\nabla u$  impliquent que

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \|Eu^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2$$

et

$$\|\nabla u\|_{L^2((0, t) \times \mathbb{R}^3)}^2 \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla Eu^\varepsilon\|_{L^2((0, t) \times \mathbb{R}^3)}^2.$$

Ceci conclut alors la démonstration du théorème 5.2.3.

### 5.3 Remarque sur le cas de l'extérieur de la courbe

De manière équivalente à la partie précédente, nous nous donnons  $\Gamma$  une courbe régulière bornée de l'espace et nous supposons que  $\Pi_\varepsilon = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon$  est un domaine extérieur simplement connexe avec un bord  $\mathbb{C}^\infty$  tel que  $\Omega_\varepsilon$  converge vers  $\Gamma$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  dans le sens donné dans l'introduction de ce chapitre. Nous allons maintenant démontrer que la donnée initiale converge vers la donnée initiale sans obstacle, mais nous n'arriverons pas à montrer que la courbe n'apporte pas de contribution pour les temps  $t > 0$ .

Pour une famille d'obstacle  $\{\Omega_\varepsilon\}$  se contractant vers la courbe, et pour un tourbillon initial  $u_0$  dont le support est compact et disjoint des obstacles, nous avons la proposition suivante.

**Proposition 5.3.1.** *Nous avons  $Eu_0^\varepsilon \rightarrow u_0$  fortement dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$ , où  $u_0$  correspond au champ de vitesse sans obstacle (5.1.4).*

*Démonstration.* En notant par  $\eta_\varepsilon$  une fonction troncature qui vaut 0 sur  $\Omega_\varepsilon + B(0, \varepsilon)$  et 1 à l'extérieur de  $\Omega_\varepsilon + B(0, 2\varepsilon)$ , nous introduisons le champ de vecteurs à divergence nulle

$$w^\varepsilon = \text{rot}(\eta_\varepsilon \psi) = \eta_\varepsilon u_0 + \nabla \eta_\varepsilon \times \psi$$

avec  $\psi$  la fonction courant de  $u_0$ , c'est à dire telle que  $\text{rot} \psi = u_0$  et  $\text{div} \psi = 0$ . Nous rappelons de [11] que  $\psi$  est donné explicitement par la loi de Biot-Savart  $\psi(x) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{x-y}{4\pi|x-y|^3} \times u_0(y) dy$ , ce qui vérifie  $\|\psi\|_{L^\infty} \leq C \|u_0\|_{L^2 \cap L^4} \leq C$  car  $u_0$  est continue et se comporte comme  $O(1/|x|^2)$  à l'infini.

Comme dans la partie précédente, nous rappelons que  $u_0^\varepsilon$  est la projection  $L^2$  de  $u_0|_{\Pi_\varepsilon}$  sur  $H_\varepsilon$ , et comme  $w^\varepsilon \in H_\varepsilon$ , nous avons que

$$\begin{aligned} \|Eu_0^\varepsilon - u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} &\leq \|u_0^\varepsilon - u_0\|_{L^2(\Pi_\varepsilon)} + \|u_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \\ &\leq \|w^\varepsilon - u_0\|_{L^2(\Pi_\varepsilon)} + \|u_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \\ &\leq \|\nabla \eta_\varepsilon \times \psi\|_{L^2(\Pi_\varepsilon)} + \|(1 - \eta_\varepsilon)u_0\|_{L^2(\Pi_\varepsilon)} + \|u_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \\ &\leq \|\nabla \eta_\varepsilon\|_{L^2} \|\psi\|_{L^\infty} + 2\|u_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon + B(0, 2\varepsilon))} \\ &\leq \frac{\sqrt{\varepsilon^2}}{\varepsilon} \|\psi\|_{L^\infty} + 2\sqrt{\varepsilon^2} \|u_0\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon + B(0, 2\varepsilon))} \\ &\leq C. \end{aligned}$$

Il existe donc un champ  $v \in L^2(\mathbb{R}^3)$  tel que  $Eu_0^\varepsilon - u_0 \rightarrow v$  faiblement  $L^2$ . Nous en déduisons que  $\text{div} v = \text{rot} v = 0$  sur l'extérieur de la courbe  $\Gamma$ . Montrons que ceci veut dire que  $\text{div} v = \text{rot} v = 0$  sur  $\mathbb{R}^3$  et donc que  $v = 0$ . Pour

cela nous allons montrer que tout  $f$  appartenant à  $H^{-1}(\mathbb{R}^3)$  dont le support est inclus sur une courbe est nul. Quitte à considérer une partition de l'unité et un redressement de la courbe sur le segment, nous pouvons supposer que  $\Gamma$  est le segment  $[(0, 0, -1); (0, 0, 1)]$ . Alors pour tout  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ , nous introduisons  $\varphi_\varepsilon(x_1, x_2, x_3) = h(\frac{x_1}{\varepsilon})h(\frac{x_2}{\varepsilon})\varphi(x)$  avec  $h(s)$  une fonction positive de  $\mathbb{R}$  qui vaut 1 pour  $|s| \leq 1$  et qui vaut 0 pour  $|s| \geq 2$ . Nous obtenons facilement que  $\|\varphi_\varepsilon\|_{L^2}^2 \leq C(\varphi)\varepsilon^2 \rightarrow 0$  et  $\|\nabla\varphi_\varepsilon\|_{L^2} \leq C(\varphi)$  ce qui nous permet d'extraire une sous-suite telle que  $\varphi_\varepsilon \rightarrow 0$  faiblement dans  $H^1$ . Ceci implique que  $\langle f, \varphi_\varepsilon \rangle \rightarrow 0$ . Or  $\langle f, \varphi_\varepsilon \rangle = \langle f, \varphi \rangle + \langle f, \varphi_\varepsilon - \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$  car  $\varphi_\varepsilon - \varphi$  est nul sur un voisinage de la courbe et que le support de  $f$  est inclus sur la courbe. Ceci signifie bien que  $f = 0$ .

En appliquant cet argument, nous obtenons bien que le rotationnel et la divergence de  $v$  sont nuls sur  $\mathbb{R}^3$ , et donc que  $v = 0$ .

De plus, en reprenant le raisonnement de la preuve de la proposition 5.2.1, nous déduisons de la convergence faible de  $u_0^\varepsilon$  vers  $u_0$  la convergence forte, ce qui conclut cette preuve.  $\square$

Nous n'allons pas ici rédiger à nouveau la convergence vers une solution de Navier-Stokes à l'extérieur d'une courbe avec pour donnée initiale  $u_0$ . En effet ceci se passe exactement de la même manière que dans le cas de la surface car nous regardons sur les compacts à l'extérieur des obstacles. Par rapport au cas [11] où l'obstacle se contracte vers un point, nous n'arrivons pas à montrer la convergence de la solution vers la solution de Navier-Stokes sans obstacle. Le principal problème est que nous ne trouvons pas de fonction courant qui est petit le long de la courbe. En effet, les auteurs dans [11] utilisent dans les estimations les fonctions courants  $(S\varphi)(\cdot) - (S\varphi)(0)$  qui restent d'ordre  $\varepsilon$  sur un voisinage de taille  $\varepsilon^3$ , voisinage où  $\nabla\eta_\varepsilon = O(\frac{1}{\varepsilon})$  est non nul.

## 5.4 Un calcul explicite

Nous regardons dans cette dernière partie le cas où  $S = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ . Si cela peut paraître moins intéressant que le cas de la surface, nous le donnons ici brièvement car c'est le seul cas où nous obtenons une forme explicite pour la limite  $v_0$  de  $u_0^\varepsilon$ . Notons  $\mathbb{R}_+^3 = \mathbb{R}^2 \times (0; +\infty)$  et  $\mathbb{R}_-^3 = \mathbb{R}^2 \times (-\infty; 0)$ . Pour  $\omega_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus S)$ , nous décomposons  $\omega_0 = \omega_0^+ + \omega_0^- \equiv \omega_0\chi_{\mathbb{R}_+^3} + \omega_0\chi_{\mathbb{R}_-^3}$ .

Cherchons tout d'abord une expression explicite de  $v_0^+$ . Comme nous pouvons nous douter,  $\omega_0^-$  n'interviendra pas dans cette expression car  $S$  sépare l'espace en deux domaines disjoints. Notons  $\tilde{\omega}_0^+$  le prolongement tel que  $\tilde{\omega}_0^+ = \omega_0^+ = (\omega_{01}^+, \omega_{02}^+, \omega_{03}^+)(x_1, x_2, x_3)$  sur  $\mathbb{R}_+^3$  et  $\tilde{\omega}_0^+ = (-\omega_{01}^+, -\omega_{02}^+, \omega_{03}^+)(x_1, x_2, -x_3)$

sur  $\mathbb{R}_-^3$ . Nous pouvons alors vérifier que

$$v_0^+(x) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{x-y}{4\pi|x-y|^3} \times \tilde{\omega}_0^+(y) dy$$

est un champ à divergence nulle, continu qui vérifie  $\text{rot } v_0^+ = \omega_0^+$  sur  $\mathbb{R}_+^3$ . Nous vérifions aussi avec un petit calcul que  $v_0^+ = (v_{01}^+, v_{02}^+, -v_{03}^+)(x_1, x_2, -x_3)$  sur  $\mathbb{R}_-^3$  ce qui implique par la continuité de  $v_0^+$  à travers  $S$  que  $v_0^+$  est tangent au plan  $S$ .

Ce champ est de plus borné, et comme  $\omega_0$  est à support compact, il se comporte à l'infini comme  $1/|x|^2$ , ce qui est bien  $L^2$  à l'infini. En construisant de même  $v_0^-$ , nous avons donc  $v_0 \in \mathcal{H}_S$  tel que  $\text{rot } v_0 = \omega_0$  sur  $\mathbb{R}^3 \setminus S$ . Avec une démonstration similaire de celle de la proposition 5.2.1, nous montrons que  $Eu_0^\varepsilon$  converge fortement dans  $L^2$  vers  $v_0$ .

La convergence des solutions pour  $t > 0$  vers une solution de Navier-Stokes à l'extérieur du plan se fait alors de la même manière que dans les parties précédentes. Dans le cas où  $S$  est un plan, nous avons alors une forme explicite (en fonction de  $\omega_0$ ) de  $f$ , la densité qui vérifie  $\text{rot } v_0 = \omega_0 + f\delta_S$  :

$$f(x) = f(x_1, x_2) = \left( \int_{\mathbb{R}^3} \frac{x-y}{4\pi|x-y|^3} \times (\tilde{\omega}_0^+(y) - \tilde{\omega}_0^-(y)) dy \right) \times n,$$

avec  $n = (0, 0, 1)$ .



# Chapitre 6

## Unicité pour le système mixte Euler point vortex

### Résumé

Nous montrons l'unicité du système mixte Euler point vortex avec un seul point vortex introduit par Marchioro et Pulvirenti dans [27], dans le cas où le tourbillon est initialement constant autour du point vortex.

Prépublication écrite en collaboration avec E. Miot sous le titre "Uniqueness for the vortex-wave system when the vorticity is constant near the vortex point", soumis.



## 6.1 Introduction

Rappelons les équations et définitions dont nous allons nous servir. Le tourbillon est composé d'une partie régulière  $\omega(t)$  et d'un point vortex  $z(t)$ . Si  $x \neq z_0 = z(0)$ , alors nous notons par  $\Phi_t(x)$  la trajectoire (voir (1.2.2)) et par  $v = K * \omega$  la vitesse créée par  $\omega$ , où  $K$  est le noyau de la loi de Biot-Savart (voir (1.2.5)).

Dans tout ce chapitre, nous nous donnons un tourbillon régulier  $\omega_0$ , à support compact et un point vortex  $z_0$ . Nous définissons alors les solutions lagrangiennes et euleriennes du système mixte Euler point vortex de la manière suivante.

**Définition 6.1.1** (Solutions lagrangiennes). *Soient  $\omega_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$  et  $z_0 \in \mathbb{R}^2$ . Le triplet  $(\omega, z, \phi)$  est une solution lagrangienne globale du système mixte Euler point vortex, avec une donnée initiale  $(\omega_0, z_0)$ , si  $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}, L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2))$ ,  $v = K * \omega \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2)$ ,*

$$z : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

*sont tels que  $z \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2)$ ,  $\phi(\cdot, x) \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2)$  pour tout  $x \neq z_0$  et s'il satisfait*

$$\begin{cases} v(\cdot, t) = (K * \omega)(\cdot, t), \\ \dot{z}(t) = v(t, z(t)), \\ z(0) = z_0, \\ \dot{\phi}_t(x) = v(t, \phi_t(x)) + K(\phi_t(x) - z(t)), \\ \phi_0(x) = x, \quad x \neq z_0, \\ \omega(\phi_t(x), t) = \omega_0(x), \end{cases} \quad (\text{FL})$$

*où  $\phi_t = \phi(t, \cdot)$ . De plus, pour tout  $t$ ,  $\phi_t$  est un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{z_0\}$  dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \{z(t)\}$  préservant la mesure de Lebesgue.*

**Définition 6.1.2** (Solutions euleriennes). *Soient  $\omega_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$  et  $z_0 \in \mathbb{R}^2$ . Le couple  $(\omega, z)$  est une solution eulerienne globale du système mixte Euler point vortex, avec une donnée initiale  $(\omega_0, z_0)$ , si*

$$\omega \in L^\infty(\mathbb{R}, L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)), \quad z \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2)$$

*et si nous avons dans le sens des distributions*

$$\begin{cases} \partial_t \omega + \operatorname{div}((v + H)\omega) = 0, \\ \omega(0) = \omega_0, \\ \dot{z}(t) = v(t, z(t)), \quad z(0) = z_0, \end{cases} \quad (\text{FE})$$

avec  $v$  et  $H$  donnés par

$$v(t, \cdot) = K *_x \omega(t), \quad H(t, \cdot) = K(\cdot - z(t)).$$

Autrement dit, pour toute fonction test  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2)$ , nous avons <sup>1</sup>

$$-\int_{\mathbb{R}^2} \omega_0(x) \varphi(0, x) dx = \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^2} \omega(\partial_t \varphi + (v + H) \cdot \nabla \varphi) ds dx,$$

et <sup>2</sup> pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$

$$z(t) = z_0 + \int_0^t v(s, z(s)) ds.$$

Nous montrerons dans un premier temps le théorème suivant.

**Théorème 6.1.3.** *Soient  $\omega_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$  et  $z_0 \in \mathbb{R}^2$ . Soit  $(\omega, z, \phi)$  une solution lagrangienne globale du système mixte Euler point vortex, avec pour donnée initiale  $(\omega_0, z_0)$ , alors  $(\omega, z)$  est une solution eulerienne globale.*

L'objectif de ce chapitre est d'étudier l'unicité des solutions lagrangienne ou eulerienne quand le tourbillon initial appartient à  $L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ , et est constant près du point vortex  $z_0$ . Plus précisément, nous démontrons le résultat suivant.

**Théorème 6.1.4.** *Soient  $\omega_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$  et  $z_0 \in \mathbb{R}^2$  tels qu'il existe  $R_0 > 0$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$  tels que*

$$\omega_0 \equiv \alpha \text{ sur } B(z_0, R_0).$$

*Supposons de plus que  $\omega_0$  est à support compact. Il existe alors une unique solution eulerienne du système mixte Euler point vortex vérifiant cette donnée initiale.*

Afin de prouver ce théorème, nous montrons tout d'abord que si  $(\omega, z)$  est une solution eulerienne, alors  $\omega$  est une solution renormalisée de l'équation du transport, au sens de DiPerna-Lions [4]. Grâce à ce résultat, nous remarquons que le tourbillon reste constant près du point vortex. Nous profitons alors de la formulation faible (FE) pour obtenir une équation aux dérivées partielles satisfaites par la vitesse  $v = K * \omega$ .

<sup>1</sup>En vertu du lemme 6.2.2, le champ défini par  $v = K * \omega$  appartient à  $L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2)$ . De plus,  $H$  appartient à  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2)$ , et cette définition a donc bien un sens.

<sup>2</sup>Nous verrons au lemme 6.2.2 et à la proposition 6.3.8 que  $v(t)$  est défini pour tout temps et continu par rapport à la variable spatiale.

Soient deux solutions euleriennes données  $(\omega_1, z_1)$  et  $(\omega_2, z_2)$ , pour les comparer nous introduisons la quantité

$$r(t) = |\tilde{z}(t)|^2 + \|\tilde{v}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

où  $\tilde{z} = z_1 - z_2$ ,  $\tilde{\omega} = \omega_1 - \omega_2$  et  $\tilde{v} = v_1 - v_2 = K * \tilde{\omega}$ . Sachant que  $\tilde{\omega}$  s'annule sur un voisinage du point vortex, la vitesse  $\tilde{v}$  est harmonique sur ce voisinage. Ceci procure en particulier un contrôle des normes  $L^\infty$  (ainsi que des normes  $L^\infty$  du gradient) de la vitesse par ces normes  $L^2$ . Par une estimation du type Gronwall, nous concluons alors que  $r \equiv 0$ .

En utilisant alors ce théorème, le théorème 6.1.3 ainsi que l'existence d'une solution lagrangienne globale établie par Marchioro et Pulvirenti dans [27], nous observons qu'une solution eulerienne est aussi une solution lagrangienne. Les définitions 6.1.1 et 6.1.2 sont donc équivalentes si le tourbillon initial appartient à  $L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ , à support compact et constant près de  $z_0$ .

## 6.2 Lagrangien implique eulerien

Nous rappelons tout d'abord quelques propriétés remarquables sur la convolution avec le noyau de la loi de Biot-Savart  $K$ . Les preuves sont bien connues et peuvent être trouvées dans [25, 28]. Commençons par énoncer l'inégalité de Calderón-Zygmund.

**Lemme 6.2.1.** *Soient  $f \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$  et  $g = K * f$  tel que  $\text{rot } g = f$  et  $\text{div } g = 0$ . Alors pour tout  $2 \leq p < +\infty$ , nous avons*

$$\|\nabla g\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq Cp \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)},$$

où  $C$  est une constante universelle.

Nous utiliserons souvent le lemme suivant.

**Lemme 6.2.2.** *Soient  $f \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$  et  $g = K * f$ . Alors  $g$  satisfait*

$$\|g\|_{L^\infty} \leq C(\|f\|_{L^\infty} + \|f\|_{L^1}). \quad (6.2.1)$$

De plus,

$$|g(x) - g(y)| \leq C(\|f\|_{L^\infty}, \|f\|_{L^1}) \varphi(|x - y|), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2, \quad (6.2.2)$$

où  $\varphi$  est la fonction continue, concave et croissante, définie par

$$\varphi(z) = \begin{cases} z(1 - \ln(z)) & \text{si } 0 \leq z < 1 \\ 1 & \text{si } z \geq 1. \end{cases}$$

Nous notons par  $\mathcal{AL}$  l'ensemble des fonctions quasi-Lipschitz de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ , c'est à dire les fonctions qui vérifient

$$|g(x) - g(y)| \leq C\varphi(|x - y|), \quad x, y \in \mathbb{R}^2$$

pour une constante  $C$ . Nous définissons par  $L^\infty(\mathcal{AL})$ , l'ensemble des fonctions  $v = v(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$  satisfaisant

$$|v(t, x) - v(t, y)| \leq C|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}$$

pour une constante  $C$  indépendante de  $t$ . Nous remarquons que la borne uniforme (6.2.1) est vérifiée pour une fonction  $f$  appartenant à  $L^p \cap L^q$  pour  $p < 2$  et  $q > 2$ , alors que l'hypothèse  $f \in L^\infty$  est indispensable pour l'estimation quasi-Lipschitz.

Dans notre cas, nous appliquons toujours ces résultats pour  $f = \omega(t)$  et  $v = g = K *_x \omega(t)$ , avec  $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}, L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2))$ . Nous obtenons donc les estimations précédentes uniformément en temps.

De plus, nous utiliserons une fonction de troncature  $\chi_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , régulière, *radiale*, telle que

$$\chi_0 \equiv 0 \text{ sur } B(0, \frac{1}{2}), \quad \chi_0 \equiv 1 \text{ sur } B(0, 1)^c \text{ et } 0 \leq \chi_0 \leq 1. \quad (6.2.3)$$

Pour un petit  $\delta > 0$ , nous posons

$$\chi_\delta(z) = \chi_0\left(\frac{z}{\delta}\right).$$

Quand  $\delta$  tend vers 0, nous avons

$$\chi_\delta \rightarrow 1 \text{ p.p.}, \quad \|\nabla \chi_\delta\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \rightarrow 0. \quad (6.2.4)$$

Dans ce qui suit, nous notons par  $u$  le champ de vecteurs

$$u \equiv v + H.$$

Il est composé d'une partie  $v$  quasi-Lipschitz et d'une partie  $H$  singulière au point vortex  $z(t)$  et régulière ailleurs. En multipliant une fonction test par  $\chi_\delta(x - z(t))$ , nous obtenons une fonction test dont le support ne touche pas la singularité. Cette remarque nous sera très utile dans les démonstrations pour gérer cette singularité. En effet, dans une première étape, nous ferons les calculs avec des champs vectoriels réguliers, puis nous passerons dans un second temps à la limite  $\delta \rightarrow 0$ . Ceci marchera bien grâce à la forme explicite de  $H$  et au fait que  $\chi_\delta$  est radiale :

$$H(t, x) \cdot \nabla \chi_\delta(x - z(t)) \equiv 0. \quad (6.2.5)$$

**Démonstration du théorème 6.1.3.** Pour  $(\omega, z, \phi)$ , une solution de (FL), il suffit de montrer que

$$\partial_t \omega + \operatorname{div}((v + H)\omega) = 0 \quad (6.2.6)$$

au sens des distributions sur  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$ .

Donnons dans un premier temps une preuve formelle de (6.2.6). Pour une fonction  $\psi(t, x) \in C^1$ , nous définissons

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \omega(t, y) \psi(t, y) dy.$$

Nous posons  $y = \phi_t(x)$ . Sachant que  $\phi_t$  préserve la mesure de Lebesgue pour tout temps, et comme  $\omega$  est constant le long de ses trajectoires, nous obtenons

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \omega_0(x) \psi(t, \phi_t(x)) dx.$$

En dérivant par rapport au temps et en utilisant l'EDO vérifiée par  $\phi_t(x)$ , nous calculons

$$f'(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \omega_0(x) (\partial_t \psi + u \cdot \nabla \psi)(t, \phi_t(x)) dx.$$

Nous changeons alors de variable  $y = \phi_t(x)$  :

$$f'(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \omega(t, y) (\partial_t \psi + u \cdot \nabla \psi)(t, y) dy,$$

ce qui correspond à (6.2.6) au sens des distributions. Pour justifier ce calcul, nous devons avoir le droit de dériver dans l'intégrale.

Pour montrer cela, nous considérons une fonction test  $\psi = \psi(t, x)$ . Pour  $0 < \delta < 1$ , nous posons

$$\psi_\delta(t, x) \equiv \chi_\delta(x - z(t)) \psi(t, x),$$

où  $\chi_\delta$  est définie dans (6.2.3). Or  $\psi_\delta(t) \equiv 0$  sur la boule  $B(z(t), \frac{\delta}{2})$ , et nous pouvons appliquer le calcul précédent à  $\psi_\delta$ , pour tout  $t$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \omega(t, x) \psi_\delta(t, x) dx - \int_{\mathbb{R}^2} \omega_0(x) \psi_\delta(0, x) dx \\ = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \omega (\partial_t \psi_\delta + u \cdot \nabla \psi_\delta) dx ds. \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

Grâce à la convergence ponctuelle de  $\psi_\delta(t, \cdot)$  vers  $\psi(t, \cdot)$  quand  $\delta \rightarrow 0$ , nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \omega(t, x) \psi_\delta(t, x) dx - \int_{\mathbb{R}^2} \omega_0(x) \psi_\delta(0, x) dx \\ \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} \omega(t, x) \psi(t, x) dx - \int_{\mathbb{R}^2} \omega_0(x) \psi(0, x) dx \end{aligned} \quad (6.2.8)$$

par le théorème de convergence dominée de Lebesgue. Nous calculons ensuite

$$\begin{aligned} \partial_t \psi_\delta + u \cdot \nabla \psi_\delta &= \chi_\delta(x - z) (\partial_t \psi + u \cdot \nabla \psi) \\ &\quad + \psi(-\dot{z} + v + H) \cdot \nabla \chi_\delta(x - z). \end{aligned}$$

Nous utilisons (6.2.5) et la borne uniforme de  $v$  pour affirmer

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^2} \omega [\partial_t \psi_\delta + u \cdot \nabla \psi_\delta - \chi_\delta (\partial_t \psi + u \cdot \nabla \psi)] dx \right| \\ \leq C \|\psi\|_{L^\infty} \|v\|_{L^\infty} \|\omega\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \chi_\delta|(x) dx. \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

Faisons maintenant tendre  $\delta$  vers zéro. Nous observons que

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \omega \chi_\delta (\partial_t \psi + u \cdot \nabla \psi) dx ds \\ \rightarrow \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \omega (\partial_t \psi + u \cdot \nabla \psi) dx ds, \end{aligned}$$

ce qui donne la conclusion, grâce à (6.2.4), (6.2.7), (6.2.8) et (6.2.9).

## 6.3 Unicité de la solution eulerienne

Cette partie consiste à démontrer le théorème 6.1.4. La première étape consiste à prouver que si le tourbillon est initialement constant près du point vortex, alors ceci reste vrai pour tout temps. Ceci est démontré dans [27] pour les solutions lagrangiennes, en estimant la distance entre les trajectoires et le point vortex. Dans la situation présente, nous considérons des solutions euleriennes et nous n'avons plus l'existence des trajectoires. Nous ne pouvons donc pas appliquer le même raisonnement, et nous allons commencer par montrer que le tourbillon est une solution renormalisée de l'équation de transport, au sens de DiPerna et Lions [4].

Par les lemmes 6.2.1 et 6.2.2, si  $(\omega, z)$  est une solution eulerienne de (FE), nous rappelons que le champ de vecteurs  $v = K * \omega$  satisfait alors

$$v \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^+, W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{R}^2)) \cap L^\infty(\mathcal{AL}).$$

### 6.3.1 Solutions renormalisées

Nous considérons désormais que l'équation (FE) est une équation de transport avec un champ de vitesse  $u = v + H$  et une trajectoire  $z$ . Notre objectif dans cette sous-partie est de montrer que si  $\omega$  vérifie l'équation linéaire, alors il en est de même pour  $\beta(\omega)$  avec  $\beta$  une fonction régulière vérifiant quelques propriétés. Quand il n'y a pas de point vortex, ceci découle directement de la théorie développée dans [4] (voir aussi [3] pour plus de détails). Le résultat énoncé dans [4] s'applique pour des champs de vitesse ayant une certaine régularité de Sobolev. Un exemple typique d'un tel espace est  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+, W^{1,1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2))$ , régularité hors d'atteinte dans notre cas. Nous pouvons cependant étendre ce résultat à notre cas, grâce à la régularité de  $H$  en dehors du point vortex, et de sa forme explicite.

Nous définissons

$$\Sigma = \{(t, z(t)), t \in \mathbb{R}^+\}$$

et nous notons par  $\mathcal{G}$  son complémentaire dans  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$ .

Le point de départ dans [4] et [3] est l'étude de suite régularisante

$$\omega_\varepsilon = \rho_\varepsilon *_x \omega, \quad \omega_{\varepsilon,\eta} = \omega_\varepsilon *_t \theta_\eta,$$

où  $\rho_\varepsilon$  et  $\theta_\eta$  sont des noyaux régularisants standards sur  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^+$ . Nous définissons aussi pour  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2)$ ,  $f_\eta = f *_x \rho_\eta *_t \theta_\eta$ . Le lemme suivant est une conséquence directe de la régularité de Sobolev de  $v$  et de celle de  $H$  sur  $\mathcal{G}$ .

**Lemme 6.3.1** (Commutateurs). *Soit  $(\omega, z)$  une solution eulerienne de (FE). Nous avons alors*

$$\partial_t \omega_{\varepsilon,\eta} + u_\eta \cdot \nabla \omega_{\varepsilon,\eta} = r_{\varepsilon,\eta} \tag{6.3.1}$$

au sens des distributions, où l'erreur  $r_{\varepsilon,\eta}$  est définie par

$$r_{\varepsilon,\eta} = u_\eta \cdot \nabla \omega_{\varepsilon,\eta} - (u \cdot \nabla \omega)_{\varepsilon,\eta}$$

et satisfait

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \lim_{\eta \rightarrow 0} r_{\varepsilon,\eta} \right) = 0 \quad \text{dans } L^1_{\text{loc}}(\mathcal{G}).$$

*Démonstration.* Pour tout compact  $K$  de  $\mathcal{G}$  donné, il existe  $a > 0$  tel que

$$|x - z(\tau)| \geq a, \quad \forall (\tau, x) \in K.$$

Nous posons  $\chi(t, x) = \chi_0\left(\frac{x - z(t)}{a/2}\right)$ , où  $\chi_0$  est définie dans (6.2.3). Pour  $\eta$  et  $\varepsilon$  assez petit par rapport à  $a$  et pour  $(x, \tau) \in K$ , nous avons clairement

$$r_{\varepsilon,\eta}(\tau, x) = (u\chi)_\eta \cdot \nabla \omega_{\varepsilon,\eta} - ((u\chi) \cdot \nabla \omega)_{\varepsilon,\eta}.$$

La vitesse  $v$ , et donc  $v\chi$  appartiennent à  $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^+, W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{R}^2))$ . Ensuite grâce à l'égalité

$$|H(\tau, x) - H(\tau, y)| = \frac{|x - y|}{|x - z(\tau)||y - z(\tau)|},$$

nous déduisons que  $H\chi \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^+, W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{R}^2))$ . En utilisant le lemme II.1 de [4] ou le lemme 1 de [3], nous obtenons

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \lim_{\eta \rightarrow 0} r_{\varepsilon, \eta} \right) = 0 \quad \text{dans } L_{\text{loc}}^1(K).$$

Le lemme est alors prouvé.  $\square$

La seconde étape consiste à utiliser la forme explicite de  $H$ .

**Lemme 6.3.2.** *Soit  $(\omega, z)$  une solution de (FE). Soit  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction régulière telle que*

$$|\beta'(t)| \leq C(1 + |t|^p), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

avec  $p \geq 0$ . Nous avons alors pour toute fonction test  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2)$  que

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} \psi \beta(\omega) dx = \int_{\mathbb{R}^2} \beta(\omega) (\partial_t \psi + u \cdot \nabla \psi) dx \quad \text{dans } L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^+).$$

*Démonstration.* Considérons la suite régularisante  $\omega_{\varepsilon, \eta}$  définie auparavant. Comme  $\omega_{\varepsilon, \eta}$  est régulière, l'égalité (6.3.1) est en fait vérifiée presque partout dans  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$ . En multipliant (6.3.1) par  $\beta'(\omega_{\varepsilon, \eta})$  nous obtenons

$$\partial_t \beta(\omega_{\varepsilon, \eta}) + u_\eta \cdot \nabla \beta(\omega_{\varepsilon, \eta}) = \beta'(\omega_{\varepsilon, \eta}) r_{\varepsilon, \eta} \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}^2. \quad (6.3.2)$$

Nous procédons maintenant de la même manière que dans la preuve du théorème 6.1.3. Pour toute fonction test  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2)$ , donnons nous un petit paramètre  $\delta > 0$  et une fonction radiale  $\chi_\delta$  régulière de  $\mathbb{R}^2$ , définie dans (6.2.3).

Nous posons ensuite

$$\psi_\delta(t, x) = \chi_\delta(x - z(t)) \psi(t, x),$$

et

$$\psi_{\delta, n}(t, x) = \chi_\delta(x - z^n(t)) \psi(t, x),$$

où  $z^n(t)$  est une approximation régulière de  $z(t)$ . Les fonctions  $\psi_\delta$  et  $\psi_{\delta, n}$  sont supportées dans  $\mathcal{G}$ . Notons de plus que  $z$  étant Lipschitz avec pour constante de Lipschitz  $\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2)}$ , nous pouvons choisir  $z^n(t)$  tel que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} |z(t) - z^n(t)| \leq \frac{1}{n} \|v\|_{L^\infty}, \quad \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |\dot{z}^n(t)| \leq \|v\|_{L^\infty}. \quad (6.3.3)$$



En multipliant (6.3.2) par  $\psi_{\delta,n}$  et en intégrant en espace, nous obtenons pour tout  $t$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} \psi_{\delta,n}(t) \beta(\omega_{\varepsilon,\eta}(t)) dx &= \int_{\mathbb{R}^2} \beta'(\omega_{\varepsilon,\eta}) r_{\varepsilon,\eta} \psi_{\delta,n} dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2} \beta(\omega_{\varepsilon,\eta}) (\partial_t \psi_{\delta,n} + u_\eta \cdot \nabla \psi_{\delta,n}) dx. \end{aligned}$$

Pour  $\delta > 0$  donné, nous trouvons  $n$  suffisamment grand pour que  $\frac{1}{n} \|v\|_{L^\infty}$  soit petit par rapport à  $\delta$ . Grâce à la définition de  $\chi_\delta$  et (6.3.3), nous en déduisons que  $\psi_{\delta,n}$  a son support compact inclus dans  $\mathcal{G}$ . Nous pouvons alors utiliser le lemme 6.3.1, l'hypothèse sur  $\beta$  et la borne uniforme  $L^\infty$  de  $\omega_{\varepsilon,\eta}$  pour affirmer que pour  $\delta$  et  $n$  fixés

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^2} \beta'(\omega_{\varepsilon,\eta}) r_{\varepsilon,\eta} \psi_{\delta,n} dx \right) = 0 \quad \text{dans } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+). \quad (6.3.4)$$

D'ailleurs,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \lim_{\eta \rightarrow 0} \|\omega_{\varepsilon,\eta} - \omega\|_{L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+, L^1(\mathbb{R}^2))} \right) = 0,$$

ce qui donne, en utilisant la borne uniforme par rapport à  $\eta$  et  $\varepsilon$  de  $\partial_t \psi_{\delta,n} + u_\eta \cdot \nabla \psi_{\delta,n}$ ,

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^2} \beta(\omega_{\varepsilon,\eta}) (\partial_t \psi_{\delta,n} + u_\eta \cdot \nabla \psi_{\delta,n}) dx d\tau \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \beta(\omega) (\partial_t \psi_{\delta,n} + u \cdot \nabla \psi_{\delta,n}) dx d\tau \quad \text{dans } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+). \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

Finalement, puisque

$$\lim_{\eta, \varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} \beta(\omega_{\varepsilon,\eta}) \psi_{\delta,n} dx = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} \beta(\omega) \psi_{\delta,n} dx$$

au sens des distributions sur  $\mathbb{R}^+$ , nous déduisons de (6.3.4) et (6.3.5)

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} \beta(\omega) \psi_{\delta,n} dx = \int_{\mathbb{R}^2} \beta(\omega) (\partial_t \psi_{\delta,n} + u \cdot \nabla \psi_{\delta,n}) dx \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^+). \quad (6.3.6)$$

Or, nous calculons

$$\begin{aligned} \partial_t \psi_{\delta,n} + u \cdot \nabla \psi_{\delta,n} &= \chi_\delta(x - z^n) (\partial_t \psi + u \cdot \nabla \psi) \\ &+ \psi(v - \dot{z}^n + H) \cdot \nabla \chi_\delta(x - z^n). \end{aligned}$$

Commençons par faire tendre  $n$  vers  $+\infty$ . Comme  $\chi_\delta$  est radiale, nous avons

$$H \cdot \nabla \chi_\delta(x - z^n) \rightarrow H \cdot \nabla \chi_\delta(x - z) \equiv 0 \quad \text{dans } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2).$$

Grâce à la convergence simple de  $\psi_{\delta,n}$  vers  $\psi_\delta$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  et aux bornes uniformes  $L^\infty$  de la vitesse et du tourbillon, nous obtenons

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^2} \beta(\omega)(\partial_t \psi_\delta + u \cdot \nabla \psi_\delta) dx - \int_{\mathbb{R}^2} \beta(\omega) \chi_\delta(x - z)(\partial_t \psi + u \cdot \nabla \psi) dx \right| \\ \leq C \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \chi_\delta| dx. \end{aligned}$$

En faisant tendre  $\delta$  vers zéro et en utilisant (6.2.4) et (6.3.6), nous obtenons enfin

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} \beta(\omega) \psi(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}^2} \beta(\omega)(\partial_t \psi + u \cdot \nabla \psi) dx$$

au sens des distributions sur  $\mathbb{R}^+$ . Sachant que le terme de droite dans l'égalité précédente appartient à  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$ , l'égalité est en fait vérifiée dans  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$ , ce qui achève cette preuve.  $\square$

*Remarque 6.3.3.* (1) Le lemme 6.3.2 est aussi vérifié pour des fonctions  $\psi$  régulières, bornées, dont les dérivées au premier ordre en temps et en espace sont bornées. Dans ce cas, nous devons considérer des fonctions régulières  $\beta$  qui vérifient  $\beta(0) = 0$ , et donc telles que  $\beta(\omega)$  soient intégrables. Ceci peut être prouvé en approximant  $\psi$  par des fonctions régulières à support compact  $\psi_n$ , pour lesquelles le lemme 6.3.2 s'applique, et en passant ensuite à la limite  $n \rightarrow +\infty$ .

(2) Fixons  $1 \leq p < +\infty$ . En approximant  $\beta(t) = |t|^p$  par des fonctions régulières et en choisissant  $\psi \equiv 1$  dans le lemme 6.3.2, nous en déduisons que pour une solution eulerienne  $\omega$  de (FE), la fonction  $t \mapsto \|\omega(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$  est continue et constante. Nous avons en particulier

$$\|\omega(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \|\omega(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \equiv \|\omega_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \|\omega_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)},$$

et nous notons cette dernière quantité par  $\|\omega_0\|$ .

### 6.3.2 Conservation du tourbillon près du point vortex

En spécifiant notre choix de  $\beta$  dans le lemme 6.3.2, nous sommes en mesure de démontrer le résultat suivant.

**Proposition 6.3.4.** *Soit  $(\omega, z)$  une solution eulerienne de (FE) telle que*

$$\omega_0 \equiv \alpha \quad \text{sur } B(z_0, R_0)$$

avec  $R_0 > 0$ . Il existe alors une fonction continue et positive  $t \mapsto R(t)$ , dépendant seulement de  $t$ ,  $R_0$  et  $\|\omega_0\|$ , telle que  $R(0) = R_0$  et

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \omega(t) \equiv \alpha \quad \text{sur } B(z(t), R(t)).$$

*Démonstration.* Nous choisissons  $\beta(t) = (t - \alpha)^2$  et nous utilisons le lemme 6.3.2. Soit  $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2)$ , nous affirmons que pour tout  $T$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(T, x) (\omega - \alpha)^2(T, x) dx &- \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(0, x) (\omega - \alpha)^2(0, x) dx \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (\omega - \alpha)^2 (\partial_t \Phi + u \cdot \nabla \Phi) dx dt. \end{aligned}$$

Ceci est en fait une amélioration du lemme 6.3.2, dans laquelle l'égalité est vérifiée dans  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$ . En effet, nous avons  $\partial_t \omega = -\text{div}(u\omega)$  (au sens des distributions) avec  $\omega \in L^\infty$  et  $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2))$  pour tout  $q < 2$ , ce qui implique que  $\partial_t \omega$  est borné dans  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+, W^{-1,q}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2))$ . Par conséquent,  $\omega$  appartient à  $C(\mathbb{R}^+, W^{-1,q}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)) \subset C(\mathbb{R}^+, L^2_{\text{loc}-w})$ . Sachant de plus que  $t \mapsto \|\omega(t)\|_{L^2}$  est continue d'après la remarque 6.3.3, nous avons  $\omega \in C(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2))$ , et l'égalité intégrale précédente est vérifiée pour tout  $T$ .

Nous construisons maintenant une fonction test  $\Phi$  centrée en  $z(t)$ . Plus précisément, nous utilisons une fonction sur  $\mathbb{R}$  décroissante  $\varphi_0$ , valant 1 si  $s \leq 1/2$  et s'annulant si  $s \geq 1$ . Nous définissons alors  $\Phi(t, x) = \varphi_0(|x - z(t)|/R(t))$ , avec  $R(t)$  une fonction régulière, positive et décroissante, à définir plus tard, telle que  $R(0) = R_0$ . Pour s'assurer de la régularité de  $\Phi$ , nous devrions régulariser  $z$  comme cela a été fait dans la preuve du lemme 6.3.2, mais par un souci de clarté nous omettons ici ces détails. Pour  $\Phi$  ainsi choisi, nous avons  $(\omega_0(x) - \alpha)^2 \Phi(0, x) \equiv 0$ .

Nous calculons alors

$$\nabla \Phi = \frac{x - z}{|x - z|} \frac{\varphi'_0}{R(t)}$$

et

$$\partial_t \Phi = -\frac{R'(t)}{R^2(t)} |x - z| \varphi'_0 + \frac{\dot{z} \cdot (z - x)}{|x - z|} \frac{\varphi'_0}{R(t)}.$$

Comme  $u \cdot \nabla \Phi = (v + H) \cdot \nabla \Phi = v \cdot \nabla \Phi$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(T, x) (\omega - \alpha)^2(T, x) dx \\ = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (\omega - \alpha)^2 \frac{\varphi'_0(\frac{|x-z|}{R})}{R} \left( (v(x) - \dot{z}) \cdot \frac{(x - z)}{|x - z|} - \frac{R'}{R} |x - z| \right) dx dt. \end{aligned} \tag{6.3.7}$$

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que  $R_0 \leq 1$ , et donc que  $R \leq 1$ . Sachant que  $\varphi'_0(\frac{|x-z|}{R})$  est négative pour  $R/2 \leq |x-z| \leq R$ , nulle ailleurs et que  $R' < 0$ , nous pouvons majorer le terme de droite dans (6.3.7) par :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (\omega - \alpha)^2 \frac{\varphi'_0(\frac{|x-z|}{R})}{R} \left( (v(x) - v(z)) \cdot \frac{(x-z)}{|x-z|} - \frac{R'}{R} |x-z| \right) dx dt \\ \leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (\omega - \alpha)^2 \frac{|\varphi'_0|(\frac{|x-z|}{R})}{R} \left( |v(x) - v(z)| + \frac{R'}{2} \right) dx dt. \end{aligned}$$

En utilisant que  $v \in L^\infty(\mathcal{AL})$  et en rappelant que  $\varphi$  est croissante (voir le lemme 6.2.2), il découle de (6.3.7) que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(T, x) (\omega - \alpha)^2(T, x) dx \\ \leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (\omega - \alpha)^2 \frac{|\varphi'_0|(\frac{|x-z|}{R})}{R} \left( C\varphi(|x-z|) + \frac{R'}{2} \right) dx dt \\ \leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (\omega - \alpha)^2 \frac{|\varphi'_0|(\frac{|x-z|}{R})}{R} \left( CR(1 - \ln R) + \frac{R'}{2} \right) dx dt, \end{aligned}$$

avec  $C$  dépendant uniquement de  $\|\omega_0\|$ . En prenant  $R(t) = \exp(1 - (1 - \ln R_0)e^{2Ct})$ , nous obtenons

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Phi(T, x) (\omega - \alpha)^2(T, x) dx \leq 0,$$

ce qui termine la preuve.  $\square$

Une conséquence de la proposition 6.3.4 est le résultat suivant.

**Corollaire 6.3.5.** *Soient  $(\omega_1, z_1)$  et  $(\omega_2, z_2)$  deux solutions euleriennes de (FE) ayant pour donnée initiale  $(\omega_0, z_0)$ . Supposons de plus que*

$$\omega_0 \equiv \alpha \quad \text{sur } B(z_0, R_0).$$

*Pour  $T^* > 0$  fixé, il existe un temps  $T_C \leq T^*$ , dépendant seulement de  $T^*$ ,  $\|\omega_0\|$  et  $R_0$  tel que*

$$\omega_1(t) \equiv \omega_2(t) = \alpha \quad \text{sur } B\left(z(t), \frac{R(t)}{2}\right), \quad \forall t \in [0, T_C],$$

*où  $z(t)$  est le point milieu du segment  $[z_1(t), z_2(t)]$ . Nous avons de plus*

$$z_1(t), z_2(t) \in B\left(z(t), \frac{R(t)}{8}\right).$$

*Démonstration.* Définissons alors  $R := \min_{t \in [0, T^*]} R(t) > 0$ , où  $R(t)$  est donné dans la proposition 6.3.4. Comme  $|z_1(0) - z_2(0)| = 0$  et  $\|v_1\|_{L^\infty}, \|v_2\|_{L^\infty} \leq C\|\omega_0\|$ , nous avons

$$|z_1(t) - z_2(t)| \leq 2C\|\omega_0\|t \leq \frac{R}{4}, \quad \forall t \in [0, T_C],$$

avec  $T_C = \min(R(8C\|\omega_0\|)^{-1}, T^*)$ . D'où

$$|z_1(t) - z_2(t)| \leq \frac{R(t)}{4}, \quad \forall t \in [0, T_C],$$

et

$$B(z(t), \frac{R(t)}{2}) \subset B(z_1(t), R(t)) \cap B(z_2(t), R(t)).$$

La conclusion est alors une conséquence de la proposition 6.3.4.  $\square$

*Remarque 6.3.6.* En considérant  $\beta(t) = t^2$  dans le lemme 6.3.2 et en adaptant la preuve de la proposition 6.3.4, nous établissons que si le tourbillon est initialement à support compact, alors  $\omega(t)$  reste à support compact pour tout temps. En effet, si nous choisissons  $\Phi(t, x) = 1 - \varphi_0(|x - z(t)|/R(t))$ , avec  $R(t)$  une fonction positive régulière et croissante, telle que  $R(0) = R_1$ , avec  $\text{supp } \omega_0 \subset B(z_0, R_1)$ , alors (6.3.7) devient

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(T, x) \omega^2(T, x) dx \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \omega^2 \frac{-\varphi'_0(\frac{|x-z|}{R})}{R} \left( (v(x) - \dot{z}) \cdot \frac{(x-z)}{|x-z|} - \frac{R'}{R} |x-z| \right) dx dt \\ &\leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \omega^2 \frac{|\varphi'_0|(\frac{|x-z|}{R})}{R} \left( 2C - \frac{R'}{2} \right) dx dt, \end{aligned}$$

avec  $C$  dépendant uniquement de  $\|\omega_0\|$ . Le terme de droite est nul si nous prenons  $R(t) = R_1 + 4Ct$ . Le support du tourbillon augmente donc au mieux linéairement en temps (comme pour une solution lagrangienne).

### 6.3.3 Formulation faible pour la vitesse

Nous cherchons maintenant une équation vérifiée par la vitesse  $v$  pour une solution eulerienne  $(\omega, z)$  de (FE). Cette équation est établie dans [12] pour le cas où le point est considéré fixe. Cette démonstration a été reprise dans la sous-partie 3.3.4, et nous observons qu'elle s'étend facilement à notre cas. Nous obtenons alors :

**Proposition 6.3.7.** *Soit  $(\omega, z)$  une solution globale de (FE), avec pour donnée initiale  $(\omega_0, z_0)$ . Nous avons alors au sens des distributions sur  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$*

$$\begin{cases} \partial_t v + v \cdot \nabla v + \operatorname{div}(v \otimes H + H \otimes v) - v(z(t))^\perp \delta_{z(t)} = -\nabla p \\ \operatorname{div} v = 0 \\ \dot{z}(t) = v(t, z(t)) \\ v(x, 0) = K * \omega_0 \text{ et } z(0) = z_0, \end{cases}$$

où  $\delta_{z(t)}$  est la fonction de Dirac centrée en  $z(t)$  et  $H(t, x) \equiv K(x - z(t))$ .

Pour la suite de cette partie, nous notons par  $W_\sigma^{1,4}(\mathbb{R}^2)$  l'ensemble des fonctions à divergence nulle (au sens des distributions) appartenant à  $W^{1,4}(\mathbb{R}^2)$ , et par  $W_\sigma^{-1,4/3}(\mathbb{R}^2)$  son espace dual.

Pour deux solutions  $(\omega_1, z_1)$  et  $(\omega_2, z_2)$  de (FE), nous définissons  $\tilde{v} = K * (\omega_1 - \omega_2) = v_1 - v_2$ . Utilisons la proposition 6.3.7, pour obtenir les propriétés suivantes sur  $\tilde{v}$ .

**Proposition 6.3.8.** *Soit  $\omega_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$  à support compact,  $z_0 \in \mathbb{R}^2$  et  $(\omega_1, z_1), (\omega_2, z_2)$  deux solutions euleriennes de (FE) avec pour donnée initiale  $(\omega_0, z_0)$ . Soit  $\tilde{v} = v_1 - v_2$ , nous avons alors*

$$\tilde{v} \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^+, W_\sigma^{1,4}(\mathbb{R}^2)), \quad \partial_t \tilde{v} \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^+, W_\sigma^{-1,4/3}(\mathbb{R}^2)).$$

De plus, nous avons  $\tilde{v} \in C(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2))$  et

$$\|\tilde{v}(T)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = 2 \int_0^T \langle \partial_t \tilde{v}, \tilde{v} \rangle_{W_\sigma^{-1,4/3}, W_\sigma^{1,4}} ds, \quad \forall T \in \mathbb{R}^+.$$

*Démonstration.* Si nous posons  $\tilde{\omega} = \omega_1 - \omega_2$ , alors  $\tilde{v} = K * \tilde{\omega}$  et nous obtenons pour tout  $t$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \omega_1(t, x) dx \equiv \int_{\mathbb{R}^2} \omega_0(x) dx \equiv \int_{\mathbb{R}^2} \omega_2(t, x) dx.$$

Pour montrer cela, nous choisissons  $\beta(t) \equiv t$  et  $\psi \equiv 1$  dans le lemme 6.3.2, ce qui donne  $\int \tilde{\omega}(t) \equiv 0$ . De plus, d'après la remarque 6.3.6,  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont à support compact, ce qui signifie que  $\tilde{v}(t) \in L^2(\mathbb{R}^2)$  pour tout  $t$  (voir [25] pour les détails). En utilisant  $\|\omega_i\|_{L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)} \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$ , nous obtenons même que

$$\tilde{v} \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2)). \quad (6.3.8)$$

Démontrons maintenant la première propriété annoncée dans la proposition 6.3.8. Nous appliquons la proposition 6.3.7 à  $(v_i, z_i)$  pour  $i = 1$  et  $i = 2$ .

Tout d'abord, nous déduisons des lemmes 6.2.1 et 6.2.2 que  $v_i = K * \omega_i$  appartient à  $L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2)$  et que son gradient  $\nabla v_i$  à  $L^\infty(\mathbb{R}^+, L^4(\mathbb{R}^2))$ . De plus, comme le tourbillon  $\omega_i$  est à support compact, nous avons pour  $|x|$  grand

$$|v_i(t, x)| \leq \frac{C}{|x|} \int_{\mathbb{R}^2} |\omega_i(t, y)| dy,$$

d'où  $v_i$  appartient à  $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^+, L^p(\mathbb{R}^2))$  pour tout  $p > 2$ . En particulier, il en découle que

$$v_i \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^+, W^{1,4}(\mathbb{R}^2))$$

et que  $v_i \otimes v_i$  appartient à  $L_{\text{loc}}^\infty(L^{4/3})$ . Puisque  $v_i$  est à divergence nulle, nous avons  $v_i \cdot \nabla v_i = \text{div}(v_i \otimes v_i)$ , et donc  $v_i \cdot \nabla v_i \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^+, W^{-1, \frac{4}{3}}(\mathbb{R}^2))$ . De plus,  $v_i(t) \otimes H_i(t)$  appartient à  $L_{\text{loc}}^{4/3}$ , alors qu'à l'infini,  $H_i$  et  $v_i$  sont bornés par  $C/|x|$ , ce qui appartient à  $L^{8/3}$ . Ceci entraîne

$$\text{div}(v_i \otimes H_i), \text{div}(H_i \otimes v_i) \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^+, W^{-1, \frac{4}{3}}(\mathbb{R}^2)).$$

Ensuite, nous déduisons de l'injection de  $W^{1,4}(\mathbb{R}^2)$  dans  $C_0^0(\mathbb{R}^2)$  que  $\delta_{z_i}$  appartient à  $L_{\text{loc}}^2(W^{-1, \frac{4}{3}})$ . Par conséquent  $v_i \delta_{z_i} \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^+, W^{-1, \frac{4}{3}}(\mathbb{R}^2))$ .

En accord avec la proposition 6.3.7, nous obtenons finalement

$$\langle \partial_t v_i, \Phi \rangle = \langle \partial_t v_i - \nabla p_i, \Phi \rangle \leq C \|\Phi\|_{L^2(W_\sigma^{1,4})}$$

pour tout champ vectoriel régulier, à divergence nulle  $\Phi$ . Ceci implique que

$$\partial_t v_i \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^+, W_\sigma^{-1, 4/3}(\mathbb{R}^2)), \quad i = 1, 2,$$

et il en est de même pour  $\partial_t \tilde{v}$ . Puisque  $\tilde{v}$  appartient à  $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^+, W_\sigma^{1,4})$ , nous déduisons de (6.3.8) et du lemme 1.2 du chapitre III de [34] que  $\tilde{v}$  est presque partout égale à une fonction continue de  $\mathbb{R}^+$  dans  $L^2$  et nous avons au sens des distributions sur  $\mathbb{R}^+$  :

$$\frac{d}{dt} \|\tilde{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = 2 \langle \partial_t \tilde{v}, \tilde{v} \rangle_{W_\sigma^{-1, 4/3}, W_\sigma^{1,4}}.$$

Nous concluons donc en utilisant le fait que  $\tilde{v}(0) = 0$ . □

### 6.3.4 Preuve du théorème 6.1.4

Dans ce paragraphe, nous fournissons une preuve du théorème 6.1.4 en utilisant l'équation vérifiée par la vitesse. Dans ce but, nous considérons deux solutions euleriennes de (FE) :  $(\omega_i, z_i)$  pour  $i = 1, 2$ , et nous gardons

les notations du paragraphe précédent. Vu la proposition 6.3.8, nous pouvons introduire

$$r(t) \equiv \|v_1(t, \cdot) - v_2(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + |z_1(t) - z_2(t)|^2.$$

Fixons un temps positif  $T^*$ . Nous montrerons par un argument de type Gronwall que  $r$  est identiquement nul. Comme  $T^*$  est arbitrairement choisi, ceci nous fournira l'unicité globale sur  $\mathbb{R}^+$ . Soit

$$R = \min_{t \in [0, T^*]} R(t), R_M = \max_{t \in [0, T^*]} R(t),$$

où  $R(t)$  est la fonction définie dans la proposition 6.3.4 et soit  $T_C$  le temps introduit dans le corollaire 6.3.5. Les quantités  $R$  et  $T_C$  dépendent seulement de  $T^*$ ,  $\|\omega_0\|$  et  $R_0$ . Comme  $r(0) = 0$ , il existe  $T_0$  tel que

$$r(t) \leq 1, \quad \forall t \leq T_0,$$

et nous prenons  $T_0 \leq T_C$  maximal pour cette propriété.

Avant tout, nous profitons du fait que  $\omega_i$  est constant autour du point vortex pour donner des estimations pour le champ harmonique  $\tilde{v}(t)$  au voisinage de  $z_1(t)$  et  $z_2(t)$ . Rappelons que  $z(t)$  est le point milieu de  $[z_1(t), z_2(t)]$ .

**Lemme 6.3.9.** *Pour tout  $t \leq T_C$ ,  $\tilde{v}(\cdot, t)$  est harmonique sur  $B(z(t), R(t)/2)$ , avec  $R(t) > 0$  et  $T_C$  donnés au corollaire 6.3.4. En particulier, nous avons les inégalités suivantes :*

- (1)  $\|\tilde{v}(t, \cdot)\|_{L^\infty(B(z(t), R(t)/4))} \leq C \|\tilde{v}(t, \cdot)\|_{L^2},$
- (2)  $\|\nabla \tilde{v}(t, \cdot)\|_{L^\infty(B(z(t), R(t)/4))} \leq C \|\tilde{v}(t, \cdot)\|_{L^2},$

avec  $C$  dépendant uniquement de  $R$ .

*Démonstration.* Le corollaire 6.3.5 nous assure que  $\text{rot } v_i = \alpha$  sur  $B(z(t), R(t)/2)$ , et donc  $\text{rot } \tilde{v} = \text{div } \tilde{v} = 0$  sur cette même boule, ce qui signifie bien que  $\tilde{v}$  est harmonique sur cette boule :  $\Delta \tilde{v} = 0$ . Les majorations (1) et (2) découlent alors du théorème de la valeur moyenne (voir [6]). En effet, en écrivant la formule de la moyenne pour tout  $x \in B = B(0, R/4)$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \tilde{v}(x) &= \frac{1}{\pi(R/8)^2} \int_{B(x, R/8)} \tilde{v}(y) dy \\ \nabla \tilde{v}(x) &= \frac{1}{\pi(R/8)^2} \int_{B(x, R/8)} \nabla \tilde{v}(y) dy = \frac{1}{\pi(R/8)^2} \int_{\partial B(x, R/8)} \tilde{v} \nu ds \\ |\nabla \tilde{v}(x)| &\leq \frac{16}{R} \|\tilde{v}\|_{L^\infty(\partial B(x, R/8))}. \end{aligned}$$



Il reste alors à prouver que  $\|\tilde{v}\|_{L^\infty(B(0,3R/8))} \leq C\|\tilde{v}\|_{L^2}$ . Pour cela, récrivons la formule de la moyenne pour tout  $x \in B(0,3R/8)$

$$\begin{aligned} \tilde{v}(x) &= \frac{1}{\pi(R/8)^2} \int_{B(x,R/8)} \tilde{v}(y) dy \\ |\tilde{v}(x)| &\leq \frac{1}{\pi(R/8)^2} \int_{B(x,R/8)} |\tilde{v}(y)| dy \\ &\leq \frac{1}{\pi(R/8)^2} \|\tilde{v}\|_{L^2} \|1\|_{L^2(B(x,R/8))} \\ &\leq \frac{8}{\sqrt{\pi}R} \|\tilde{v}\|_{L^2}. \end{aligned}$$

□

L'inégalité de Gronwall pour  $r(t)$  est le résultat de la proposition suivante.

**Proposition 6.3.10.** *Pour tout  $T \in [0, T_0]$ , pour tout  $p \geq 2$ , nous avons*

$$r(T) \leq C \int_0^T \left[ \varphi(r(t)) + p r(t)^{1-\frac{1}{p}} \right] dt, \quad (6.3.9)$$

où  $C$  dépend seulement de  $T^*$  et  $\|\omega_0\|$ , et où  $\varphi$  est défini dans le lemme 6.2.2.

*Démonstration.* Nous procédons en plusieurs étapes. Tout le long de cette preuve,  $C$  désigne une constante dépendant uniquement de  $R$  et  $R_M$ , et donc de  $\|\omega_0\|$  et  $T^*$ .

**Etape 1.** La différence des vitesses vérifie

$$\begin{aligned} \forall p \geq 2, \quad \forall T \leq T_C, \\ \|\tilde{v}(T, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq C \int_0^T \left[ r(t) + \sqrt{r(t)} \varphi(\sqrt{r(t)}) + p r(t)^{1-1/p} \right] dt. \end{aligned}$$

En effet, en soustrayant les deux équations de la proposition 6.3.7 vérifiées par  $(v_i, z_i)$ , nous trouvons

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{v} + \tilde{v} \cdot \nabla v_1 + v_2 \cdot \nabla \tilde{v} + \operatorname{div} (\tilde{v} \otimes H_1 + v_2 \otimes \tilde{H} + H_1 \otimes \tilde{v} + \tilde{H} \otimes v_2) \\ - (v_1(z_1)^\perp \cdot \delta(z_1) - v_2(z_2)^\perp \cdot \delta(z_2)) = -\nabla \tilde{p}. \end{aligned} \quad (6.3.10)$$

Nous considérons alors des fonctions régulières, à divergence nulle  $\Phi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2)$  convergeant vers  $\tilde{v}$  dans  $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^+, W^{1,4}(\mathbb{R}^2))$ . Nous les associons aux fonctions tests de (6.3.10), et nous faisons tendre  $n$  vers  $+\infty$ . Pour

tout  $T \in \mathbb{R}^+$ , nous avons

$$\int_0^T \langle \partial_t \tilde{v}, \Phi_n \rangle_{W_\sigma^{-1,4/3}, W_\sigma^{1,4}} ds \rightarrow \int_0^T \langle \partial_t \tilde{v}, \tilde{v} \rangle_{W_\sigma^{-1,4/3}, W_\sigma^{1,4}} ds.$$

Nous passons à la limite dans les autres termes grâce aux majorations de  $v_i$  énoncées dans la démonstration de la proposition 6.3.8. Ceci implique alors

$$\frac{1}{2} \|\tilde{v}(T, \cdot)\|_{L^2}^2 = I + J + K, \quad (6.3.11)$$

avec

$$\begin{aligned} I &= - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{v} \cdot (\tilde{v} \cdot \nabla v_1 + v_2 \cdot \nabla \tilde{v}) dx dt, \\ J &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (\tilde{v} \otimes H_1 + v_2 \otimes \tilde{H} + H_1 \otimes \tilde{v} + \tilde{H} \otimes v_2) : \nabla \tilde{v} dx dt, \\ K &= \int_0^T (v_1(z_1)^\perp \cdot \tilde{v}(z_1) - v_2(z_2)^\perp \cdot \tilde{v}(z_2)) dt. \end{aligned}$$

L'étape suivante consiste à majorer tous les termes de droite. Nous considérons les temps  $T \leq T_0$  dans (6.3.11). Afin de simplifier les notations, nous posons  $B = B(z(t), R(t)/4)$ .

Concernant le premier terme  $I$  de (6.3.11), nous commençons par noter que

$$\int_{\mathbb{R}^2} (v_2 \cdot \nabla \tilde{v}) \cdot \tilde{v} dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} v_2 \cdot \nabla |\tilde{v}|^2 dx = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{v}|^2 \operatorname{div} v_2 dx = 0.$$

De plus, l'inégalité d'Hölder donne

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} (\tilde{v} \cdot \nabla v_1) \cdot \tilde{v} dx \right| \leq \|\tilde{v}\|_{L^2} \|\tilde{v}\|_{L^q} \|\nabla v_1\|_{L^p},$$

avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$ . Le lemme 6.2.1 établit que  $\|\nabla v_1\|_{L^p} \leq Cp \|\omega_1\|_{L^p}$  pour  $p \geq 2$ .

Or, nous écrivons par interpolation  $\|\tilde{v}\|_{L^q} \leq \|\tilde{v}\|_{L^2}^a \|\tilde{v}\|_{L^\infty}^{1-a}$  avec  $\frac{1}{q} = \frac{a}{2} + \frac{1-a}{\infty}$ .

Nous avons  $a = 1 - \frac{2}{p}$  et nous obtenons bien

$$|I| \leq Cp \int_0^T \|\tilde{v}\|_{L^2}^{2-2/p} dt. \quad (6.3.12)$$

Majorons maintenant  $J$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} (\tilde{v} \otimes H_1) : \nabla \tilde{v} dx &= \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{i,j} \tilde{v}_i H_{1,j} \partial_j \tilde{v}_i dx = \frac{1}{2} \sum_i \int_{\mathbb{R}^2} \sum_j H_{1,j} \partial_j \tilde{v}_i^2 dx \\ &= -\frac{1}{2} \sum_i \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{v}_i^2 \operatorname{div} H_1 dx = 0, \end{aligned}$$

car  $H_1$  est à divergence nulle, et

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (H_1 \otimes \tilde{v}) : \nabla \tilde{v} \, dx \, dt \right| &\leq \left| \int_0^T \int_B (H_1 \otimes \tilde{v}) : \nabla \tilde{v} \, dx \, dt \right| \\ &+ \left| \int_0^T \int_{B^c} (H_1 \otimes \tilde{v}) : \nabla \tilde{v} \, dx \, dt \right|. \end{aligned} \quad (6.3.13)$$

Nous réalisons une intégration par parties dans le second terme de droite dans (6.3.13). Sachant que  $\operatorname{div} \tilde{v} = 0$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (H_1 \otimes \tilde{v}) : \nabla \tilde{v} \, dx \, dt \right| &\leq \left| \int_0^T \int_B (H_1 \otimes \tilde{v}) : \nabla \tilde{v} \, dx \, dt \right| \\ &+ \left| - \int_0^T \left( \int_{B^c} (\tilde{v} \cdot \nabla H_1) \cdot \tilde{v} \, dx + \int_{\partial B} (H_1 \cdot \tilde{v})(\tilde{v} \cdot \nu) \, ds \right) dt \right| \\ &\leq \int_0^T \|H_1\|_{L^1(B)} \|\tilde{v}\|_{L^\infty(B)} \|\nabla \tilde{v}\|_{L^\infty(B)} \, dt \\ &\quad + \int_0^T \|\nabla H_1\|_{L^\infty(B^c)} \|\tilde{v}\|_{L^2}^2 \, dt \\ &\quad + \int_0^T \|H_1\|_{L^\infty(\partial B)} \|\tilde{v}\|_{L^\infty(\partial B)}^2 |\partial B| \, dt. \end{aligned}$$

Le lemme 6.3.9 nous assure que

$$\left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (H_1 \otimes \tilde{v}) : \nabla \tilde{v} \, dx \, dt \right| \leq C \int_0^T \|\tilde{v}\|_{L^2}^2 \, dt.$$

De même, nous obtenons en intégrant par parties

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (v_2 \otimes \tilde{H}) : \nabla \tilde{v} \, dx \, dt \right| &\leq \left| \int_0^T \int_B (v_2 \otimes \tilde{H}) : \nabla \tilde{v} \, dx \, dt \right| \\ &+ \left| - \int_0^T \left( \int_{B^c} (\tilde{H} \cdot \nabla v_2) \cdot \tilde{v} \, dx + \int_{\partial B} (v_2 \cdot \tilde{v})(\tilde{H} \cdot \nu) \, ds \right) dt \right|. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (v_2 \otimes \tilde{H}) : \nabla \tilde{v} \, dx \, dt \right| &\leq \int_0^T \|\tilde{H}\|_{L^1(B)} \|v_2\|_{L^\infty} \|\nabla \tilde{v}\|_{L^\infty(B)} \, dt \\ &\quad + \int_0^T \|\tilde{H}\|_{L^\infty(B^c)} \|\tilde{v}\|_{L^2} \|\nabla v_2\|_{L^2} \, dt \\ &\quad + \int_0^T \|\tilde{H}\|_{L^\infty(\partial B)} \|\tilde{v}\|_{L^\infty(\partial B)} \|v_2\|_{L^\infty} |\partial B| \, dt. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Calderón-Zygmund pour  $v_2$  et le lemme 6.3.9, nous avons

$$\left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (v_2 \otimes \tilde{H}) : \nabla \tilde{v} \, dx \, dt \right| \leq C \int_0^T \left( \|\tilde{H}\|_{L^1(B)} + \|\tilde{H}\|_{L^\infty(B^c)} \right) \|\tilde{v}\|_{L^2} \, dt.$$

Un calcul similaire nous donne que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (\tilde{H} \otimes v_2) : \nabla \tilde{v} \, dx \, dt \right| \\ \leq C \int_0^T \left( \|\tilde{H}\|_{L^1(B)} + \|\nabla \tilde{H}\|_{L^2(B^c)} + \|\tilde{H}\|_{L^\infty(\partial B)} \right) \|\tilde{v}\|_{L^2} \, dt. \end{aligned}$$

Nous avons besoin ici de quelques majorations concernant  $\tilde{H}$ . Rappelons que  $\tilde{H}$  est défini par  $\tilde{H} = H_1 - H_2$ , et grâce à sa forme explicite, nous avons

$$\|\tilde{H}\|_{L^\infty(B^c)} = \sup_{z \in B^c} \frac{|z_1 - z_2|}{2\pi|z - z_1||z - z_2|} \leq (8/R)^2 \frac{|z_1 - z_2|}{2\pi}.$$

De plus, il découle des estimations sur le potentiel (voir par exemple [25]) que

$$\int_B |\tilde{H}(x)| \, dx = C \int_B |K(x - z_1) - K(x - z_2)| \, dx \leq C\varphi(|z_1 - z_2|).$$

En ce qui concerne la norme  $L^2$ , nous observons que pour  $x \in B^c$ ,

$$|\nabla \tilde{H}(x)| \leq |z_1 - z_2| \sup_{[x-z_1, x-z_2]} |D^2 K| \leq \frac{C}{|x - z|^3} |z_1 - z_2|,$$

ce qui implique que  $\|\nabla \tilde{H}\|_{L^2(B^c)} \leq C|z_1 - z_2|$ . En appliquant donc ceci, nous avons

$$|J| \leq 2C \int_0^T \left( \|\tilde{v}\|_{L^2} + |z_1 - z_2| + \varphi(|z_1 - z_2|) \right) \|\tilde{v}\|_{L^2} \, dt.$$

Comme  $\varphi$  est croissante, cette dernière inégalité devient

$$|J| \leq C \int_0^T \left[ r(t) + \sqrt{r(t)} \varphi(\sqrt{r(t)}) \right] \, dt. \quad (6.3.14)$$

Pour finir, nous décomposons le troisième terme  $K$  de (6.3.11) comme suit :

$$\begin{aligned} v_1(z_1)^\perp \cdot \tilde{v}(z_1) - v_2(z_2)^\perp \cdot \tilde{v}(z_2) &= (v_1(z_1)^\perp - v_1(z_2)^\perp) \cdot \tilde{v}(z_1) \\ &\quad + (v_1(z_2)^\perp - v_2(z_2)^\perp) \cdot \tilde{v}(z_1) \\ &\quad + v_2(z_2)^\perp \cdot (\tilde{v}(z_1) - \tilde{v}(z_2)). \end{aligned}$$

En appliquant le lemme 6.2.2 à  $v_1$ , nous obtenons

$$|v_1(z_1)^\perp \cdot \tilde{v}(z_1) - v_2(z_2)^\perp \cdot \tilde{v}(z_2)| \leq C|\tilde{v}(z_1)|\varphi(|z_1 - z_2|) + |\tilde{v}(z_2)||\tilde{v}(z_1)| \\ + \|v_2\|_{L^\infty} \|\nabla \tilde{v}\|_{L^\infty([z_1, z_2])} |z_1 - z_2|.$$

En utilisant à nouveau le lemme 6.3.9 nous concluons que

$$|K| \leq C \int_0^T \left[ r(t) + \sqrt{r(t)}\varphi(\sqrt{r(t)}) \right] dt. \quad (6.3.15)$$

Le résultat désiré correspond donc aux majorations (6.3.12), (6.3.14) et (6.3.15).

**Etape 2.** Les points vortex vérifient

$$|z_1(T) - z_2(T)|^2 \leq C \int_0^T \left[ r(t) + \sqrt{r(t)}\varphi(\sqrt{r(t)}) \right] dt, \quad \forall T \leq T_C.$$

En effet, comme  $z_1$  et  $z_2$  sont Lipschitz, leurs dérivées existent pour presque tout temps  $t$ , et nous avons en ces points

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|z_1 - z_2|^2 &= 2\langle z_1 - z_2, v_1(z_1) - v_2(z_2) \rangle \\ &= 2\langle z_1 - z_2, v_1(z_1) - v_1(z_2) \rangle + 2\langle z_1 - z_2, \tilde{v}(z_2) \rangle. \end{aligned}$$

En considérant les lemmes 6.2.2 et 6.3.9

$$\frac{d}{dt}|z_1 - z_2|^2 \leq C|z_1 - z_2|\varphi(|z_1 - z_2|) + |z_1 - z_2|\|\tilde{v}\|_{L^2},$$

puis nous concluons en intégrant dans l'inégalité précédente.

Finalement, nous observons que pour  $z \leq 1$ , nous avons

$$z\varphi(z) \leq \varphi(z^2), \quad z \leq \varphi(z).$$

La proposition 6.3.10 découle alors directement des étapes 1 et 2, ainsi que de la définition de  $T_0$ .  $\square$

Le théorème 6.1.4 est désormais une conséquence aisée du lemme suivant.

**Lemme 6.3.11.** *Pour tout  $p \geq 1$ , nous avons*

$$\varphi(t) \leq p t^{1-\frac{1}{p}}, \quad \forall t \geq 0,$$

où  $\varphi$  est définie au lemme 6.2.2.

Supposons dans un premier temps que le lemme 6.3.11 est vérifié et finissons la démonstration du théorème 6.1.4. Nous déduisons de la proposition 6.3.10 que pour tout  $T \leq T_0$ ,

$$r(T) \leq C \int_0^T p r(t)^{1-\frac{1}{p}} dt.$$

Ceci implique que

$$r(T) \leq (CT)^p, \quad \forall p \geq 2.$$

En notant  $T_1 = 1/C$  et en faisant tendre  $p$  vers l'infini, nous concluons que  $r(T) \equiv 0$  pour tout  $T < \min(T_0, T_1)$ . En réitérant la preuve, nous montrons que  $r$  s'annule sur  $[0, T_0]$ , et donc  $T_0 = T_C$ . Puisque  $T_C$  dépend seulement de  $\|\omega_0\|$  et  $T^*$ , nous pouvons passer de  $[0, T_C]$  à  $[0, T^*]$ , par un nombre fini de translation en temps de taille  $T_C$ . Ceci achève la preuve du théorème 6.1.4.

**Démonstration du lemme 6.3.11.** Le résultat est évident pour  $t \geq 1$ . Si nous posons  $f_p(t) = t^{\frac{1}{p}}(1 - \ln t)$ , il suffit de démontrer que  $f_p(t) \leq p$ . En calculant  $f'_p(t) = t^{\frac{1}{p}-1}(\frac{1}{p}(1 - \ln t) - 1)$ , nous observons que  $f'_p(t) \leq 0$  si et seulement si  $t \leq e^{1-p}$ . Alors,  $f_p$  est maximal quand  $t = e^{1-p}$  et nous en déduisons que

$$f_p(t) \leq f_p(e^{1-p}) = p e^{\frac{1}{p}-1} \leq p$$

pour  $p \geq 1$ . Ceci termine la preuve. □

## 6.4 Remarques finales

### Le cas de plusieurs points vortex

Dans ce chapitre, nous avons seulement considéré le système mixte Euler point vortex avec un seul point vortex. Dans le cas d'un nombre fini  $N$  de vortex  $z_i$ , avec pour intensités  $d_i, i = 1, \dots, N$  réelles, le système mixte Euler

points vortex (FL) est modifié comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} v(\cdot, t) = (K * \omega)(\cdot, t), \\ \dot{z}_i(t) = v(t, z_i(t)) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N d_j K(z_i(t) - z_j(t)), \\ z_i(0) = z_{i,0}, \\ \dot{\phi}_t(x) = v(t, \phi_t(x)) + \sum_{j=1}^N d_j K(\phi_t(x) - z_j(t)), \\ \phi_0(x) = x, \quad x \neq z_{j,0}, \\ \omega(\phi_t(x), t) = \omega_0(x), \quad t \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \quad (\text{FLN})$$

Dans cette situation, chaque point vortex  $z_i(t)$  est soumis aux champs générés par la partie régulière et par les autres points vortex, tandis que la partie régulière se déplace sous l'action du champ qu'elle crée, ainsi que sous l'influence des  $N$  points vortex. Les champs de vitesse apparaissant dans (FLN) sont bien définis tant que les trajectoires ne rencontrent pas les points vortex. Si les intensités  $d_i$  sont toutes du même signe, [27] établit que les collisions entre les points vortex et les trajectoires ne peuvent pas se produire en temps fini, et l'existence globale dans (FLN) est alors prouvée pour une donnée initiale  $\omega_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$  et  $N$  points vortex distincts  $z_{i,0}$ .

En particulier, pour tout  $T > 0$  donné, il existe une constante positive  $a$  telle que  $|z_i(t) - z_j(t)| \geq a$  pour tout  $t \leq T$ . Le champ créé par un point vortex près des autres points vortex est donc Lipschitz et borné. En centrant autour de chaque point vortex les fonctions tests utilisées dans les preuves de la partie 2 et 3, nous pouvons étendre les théorèmes 6.1.3 et 6.1.4 au cas de plusieurs points vortex. Ceci donne précisément

**Théorème 6.4.1.** *Soient  $\omega_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$  et  $z_{1,0}, \dots, z_{N,0}$   $N$  points vortex distincts dans  $\mathbb{R}^2$ , avec des intensités positives  $d_i$ . Supposons de plus l'existence d'un réel positif  $R_0$ , plus petit que la distance minimale entre les points vortex initiaux, et soient  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  tels que pour tout  $i$ ,*

$$\omega_0 \equiv \alpha_i \text{ sur } B(z_{i,0}, R_0).$$

*Si  $\omega_0$  est à support compact, alors il existe une unique solution eulerienne du système mixte Euler point vortex (FLN) avec une telle donnée initiale.*

Il découle de ce théorème que l'équivalence entre la formulation eulerienne et lagrangienne est encore vérifiée dans le cas de plusieurs points vortex de même signe.

### Unicité quand le point vortex est fixe

Dans cette sous-partie, nous nous intéressons à l'unicité dans le système trouvé dans [12]. La principale différence avec (FE) est le fait que le point vortex est fixe (par exemple sur l'origine) au lieu de bouger sous l'action de la vitesse. Cette équation s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0, \\ u(t, x) = v(t, x) + \gamma K(x), \quad v = K * \omega, \end{cases} \quad (6.4.1)$$

avec  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Cette équation a été obtenue comme limite asymptotique des équations classiques d'Euler à l'extérieur d'obstacle, quand l'obstacle se concentre vers un point. Les détails sont donnés dans le chapitre 1.

L'unicité dans le cas où  $\gamma = 0$  est due à la partie traitant de l'unicité dans le théorème de Yudovich (voir [35]).

Les équations (6.4.1) ont aussi été considérées avec la formulation lagrangienne par Marchioro [26] dans le cas où le support de  $\omega_0$  n'intersecte pas l'origine et avec des données régulières. Dans [26], il est prouvé que pour un tourbillon  $C^2$ , une trajectoire partant d'un point distinct de l'origine ne la rencontre jamais. Ceci donne en particulier l'unicité de la formulation lagrangienne dans ce cas.

En accord avec la sous-partie 6.3.1, il est en fait possible d'adapter les idées utilisées dans [26] aux équations (6.4.1) sans considérer les trajectoires. Nous démontrons en particulier que si le tourbillon initial  $\omega_0$  s'annule sur un voisinage de l'origine, ceci reste alors vrai pour tout temps.

**Proposition 6.4.2.** *Soit  $\omega$  une solution eulerienne globale de (6.4.1) telle que*

$$\text{supp } \omega_0 \subset B(0, R_0^{-1}) \setminus B(0, R_0)$$

*avec  $0 < R_0 < 1$ . Il existe alors deux constantes positives  $C_1$  et  $C_2$ , dépendant uniquement de  $R_0$  et  $\|\omega_0\|$ , telles que*

$$\omega(t) \equiv 0 \quad \text{sur} \quad B(0, C_1 e^{-C_2 t}), \quad \forall t \geq 0.$$

*Démonstration.* Pour cette preuve, nous prenons  $\gamma = 1$ . Comme il a été déjà mentionné, la sous-partie 6.3.1 s'applique également aux équations (6.4.1) en remplaçant le point vortex mobile par l'origine. En considérant la remarque 6.3.6, nous avons

$$\text{supp } \omega(t) \subset B(0, K(1+t)), \quad \forall t \geq 0, \quad (6.4.2)$$



où  $K$  dépend uniquement des conditions initiales  $R_0$  et  $\|\omega_0\|$ . L'objectif est donc d'appliquer le lemme 6.3.2 avec  $\beta(t) = t^2$  et en posant

$$\Phi(t, x) = \chi_0 \left( \frac{-\ln|x| - \int \ln|x-y|\omega(t, y) dy + C(t)}{2\pi R(t)} \right),$$

où  $\chi_0$  est une fonction régulière :  $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ , qui s'annule pour  $|x| \leq 1/2$ , qui vaut identiquement 1 pour  $|x| \geq 1$  et qui est croissante sur  $\mathbb{R}^+$ .  $R(t)$  est une fonction continue croissante et  $C(t)$  une fonction continue que nous terminerons plus tard. Nous notons

$$g(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \ln|x-y|\omega(t, y) dy,$$

ce qui, grâce à (6.4.2), vérifie  $2\pi|g(t, x)| \leq C_0(1 + \ln(1+t))$  avec une constante  $C_0$ . En augmentant  $C_0$  si besoin, nous avons aussi que  $-\ln|x| \geq -2\pi C_0(1 + \ln(1+t))$  pour tout  $x \in \text{supp } \omega(t)$ . En posant  $C(t) = 2C_0(1 + \ln(1+t))$  nous obtenons alors que la quantité

$$y(t, x) \equiv -\frac{\ln|x|}{2\pi} - g(t, x) + \frac{C(t)}{2\pi}$$

est positive pour tout  $t$  et  $x \in \text{supp } \omega(t)$ .

Il a été de plus démontré par Marchioro dans [26] que si  $\omega$  est une solution régulière de (6.4.1), alors

$$\partial_t g(t, x) = - \int_{\mathbb{R}^2} K^\perp(y-x) \cdot (v(y) + K(y)) \omega(t, y) dy.$$

L'article de Marchioro établit aussi que

$$\|\partial_t g\|_{L^\infty} \leq C_1, \tag{6.4.3}$$

avec  $C_1$  dépendant uniquement de  $\|\omega_0\|$  et  $R_0$ . Ceci peut être étendu aux solutions faibles euleriennes de (6.4.1) en remplaçant  $\ln$  par  $\ln_\varepsilon$  dans la définition de  $g$ , où  $\ln_\varepsilon|z|$  coïncide à  $\ln|z|$  sur  $B(0, \varepsilon)^c$  et vaut  $\ln \varepsilon$  sur  $B(0, \varepsilon)$ . En faisant tendre  $\varepsilon$  vers zéro, nous déduisons que pour chaque  $x$ ,  $g(x, \cdot)$  est Lipschitz et possède une dérivée temporelle pour presque tout temps ; de plus, la borne (6.4.3) est vérifiée pour ces temps. Nous omettons ici les détails et nous considérons que  $\Phi$  est  $C^1$ .

Nous avons de plus que

$$\nabla_x g(t, x) = - \int_{\mathbb{R}^2} K^\perp(x-y)\omega(t, y) dy = -v^\perp(t, x),$$

et donc que

$$(v + K) \cdot \nabla \Phi = (v + K) \cdot (v^\perp + K^\perp) \frac{\chi'_0}{R} \equiv 0.$$

Il en découle que

$$\partial_t \Phi(t, x) = \left( -\frac{R'(t)}{R^2(t)} y(t, x) \right) + \frac{1}{R} (-\partial_t g(t, x) + \frac{C'(t)}{2\pi}) \chi'_0 \left( \frac{y(t, x)}{R(t)} \right).$$

En utilisant le lemme 6.3.2, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(T, x) \omega^2(T, x) dx - \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(0, x) \omega_0^2(x) dx \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \omega^2 \frac{\chi'_0 \left( \frac{y(t, x)}{R} \right)}{R} \left( -\frac{R'}{R} y - \partial_t g + \frac{C'}{2\pi} \right) dx dt. \end{aligned}$$

Comme  $y \geq 0$ , le terme  $\chi'_0(\frac{y}{R})$  est positif et il est non nul quand  $\frac{1}{2} \leq \frac{y}{R} \leq 1$ , ce qui entraîne

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Phi(T, x) \omega^2(T, x) dx - \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(0, x) \omega_0^2(x) dx \leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \omega^2 \frac{\chi'_0}{R} \left( -\frac{R'}{2} - \partial_t g + \frac{C'}{2\pi} \right) dx dt.$$

En utilisant (6.4.3) et la forme explicite de  $C(t)$ , nous obtenons

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Phi(T, x) \omega^2(T, x) dx - \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(0, x) \omega_0^2(x) dx \leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \omega^2 \frac{\chi'_0}{R} \left( -\frac{R'}{2} + C_2 \right) dx dt$$

avec  $C_2$  une constante. Nous choisissons maintenant

$$R(t) = C_2 + 2C_1 t,$$

avec  $C_2$  à déterminer plus tard, afin d'obtenir

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Phi(T, x) \omega^2(T, x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(0, x) \omega_0^2(x) dx.$$

Comme  $|g(0, x)| \leq C_0$  pour tout  $x$  et puisque  $\omega_0$  s'annule sur  $B(0, R_0)$ , nous avons que pour tout  $x \in \text{supp } \omega_0$

$$-\frac{\ln |x|}{2\pi} - g(0, x) \leq -\frac{\ln R_0}{2\pi} + C_0 = C_4.$$

Nous choisissons finalement  $C_2$  tel que

$$\frac{C_4}{C_2} \leq \frac{1}{2}.$$

Avec ce choix, nous avons

$$\Phi(0, x)\omega_0^2(x) = \chi_0 \left( \frac{-\frac{\ln|x|}{2\pi} - g(0, x)}{C_2} \right) \omega_0^2(x) \equiv 0.$$

Nous déduisons que pour tout  $T$ ,  $\Phi(T, x)\omega^2(T, x) \equiv 0$ . Si nous considérons  $x$  tel que

$$-\ln|x| \geq 2\pi R(T) + C_0(1 + \ln(1 + T)),$$

alors

$$\frac{-\ln|x| - g}{2\pi R} \geq 1,$$

et donc  $\omega(T, x) = 0$ . Autrement dit

$$\omega(T) \equiv 0 \quad \text{sur} \quad B(0, e^{-C_0(1+\ln(1+T))-2\pi R(T)}),$$

ce qui correspond au résultat souhaité.  $\square$

En utilisant la proposition 6.4.2, il est alors facile d'adapter la preuve du théorème 6.1.4 avec un point vortex fixe au lieu d'un point vortex mobile et nous établissons alors l'unicité pour (6.4.1) :

**Théorème 6.4.3.** *Soit  $\omega_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$  à support compact, tel que*

$$\text{supp}(\omega_0) \cap \{0\} = \emptyset.$$

*Il existe alors une unique solution eulerienne des équations (6.4.1) avec une telle donnée initiale.*

# Bibliographie

- [1] Chemin J-Y., Desjardins B., Gallagher I. et Grenier E., *Mathematical Geophysics : An introduction to rotating fluids and to the Navier-Stokes equations*, Oxford University Press, 2006.
- [2] Delanoe Ph. et Loeper G., *Gradient estimates for potentials of invertible gradient-mappings on the sphere*, à paraître dans Calc. Var. Partial Differential Equations.
- [3] Desjardins B., *A few remarks on ordinary differential equations*, Commun. in Part. Diff. Eq. ,21 :11, 1667-1703, 1996.
- [4] DiPerna R. J. et Lions P. L., *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces*, Invent. Math. 98, 511-547, 1989.
- [5] Galdi G.P., *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations. Vol I*, volume 38 of *Springer Tracts in Natural Philosophy*, Springer-Verlag, New-York, 1994.
- [6] Gilbarg D. et Trudinger N. S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, Berlin 1998.
- [7] Glutsyuk A., *Simple proofs of uniformization theorems*, [http ://arxiv.org/abs/math/0510071](http://arxiv.org/abs/math/0510071), 2004.
- [8] Grisvard P., *Singularities in Boundary Value Problems*, RMA 22, Masson, Paris 1992.
- [9] Hopf E., *Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen*, Math. Nachr. 4, (1951), 213-231.
- [10] Iftimie D., *Evolution de tourbillon à support compact*, Actes du Colloque de Saint-Jean-de-Monts, 1999.
- [11] Iftimie D. et Kelliher J., *Remarks on the vanishing obstacle limit for a 3D viscous incompressible fluid*, à paraître dans Proceedings of the AMS, 2008.
- [12] Iftimie D., Lopes Filho M.C. et Nussenzweig Lopes H.J., *Two Dimensional Incompressible Ideal Flow Around a Small Obstacle*, Comm. Partial Diff. Eqns. 28 (2003), no. 1&2, 349-379.

- [13] Iftimie D., Lopes Filho M.C. et Nussenzveig Lopes H.J., *Two Dimensional Incompressible Viscous Flow Around a Small Obstacle*, Math. Annalen. 336 (2006), 449-489.
- [14] Iftimie D., Lopes Filho M.C. et Nussenzveig Lopes H.J., *Incompressible flow around a small obstacle and the vanishing viscosity limit*, to appear, Comm. Math. Phys., 2008.
- [15] Kikuchi K., *Exterior problem for the two-dimensional Euler equation*, J Fac Sci Univ Tokyo Sect 1A Math 1983 ; 30(1) :63-92.
- [16] Kozono H. et Yamazaki M., *Local and global unique solvability of the Navier-Stokes exterior problem with Cauchy data in the space  $L^{n,\infty}$* , Houst. J. Math. **21**(4), 755-799 (1995).
- [17] Lacave C., *Two Dimensional Incompressible Ideal Flow Around a Thin Obstacle Tending to a Curve*, à paraître dans les Annales de l'IHP (Analyse non linéaire), 2008.
- [18] Lacave C., *Two Dimensional Incompressible Viscous Flow Around a Thin Obstacle Tending to a Curve*, soumis.
- [19] Lacave C. et Miot E., *Uniqueness for the vortex-wave system when the vorticity is constant near the point vortex*, soumis.
- [20] Ladyzhenskaya O., *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, 2nd english edn. Gordon and Breach, New York, 1969.
- [21] Lichtenstein L., *Zur Theorie der konformen Abbildungen; Konforme Abbildungen nicht-analytischer singularitätenfreier Flächenstücke auf ebene Gebiete*, Bull. Acad. Sci. Cracovie, 1916, 192-217.
- [22] Lions J.L. et Magenes E., *Nonhomogeneous Boundary Value Problems and Applications*, Springer, Berlin, 1972.
- [23] Lopes Filho M.C., *Vortex dynamics in a two dimensional domain with holes and the small obstacle limit*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, 39(2)(2007) : 422-436.
- [24] Lopes Filho M.C., Nussenzveig Lopes H.J. and Zheng Y., *Weak solutions to the equations of incompressible, ideal flow*, Text of mini-course for the 22nd Brazilian Colloquium of Mathematics, (1999), [http ://www.ime.unicamp.br/ mlopes/publications.html](http://www.ime.unicamp.br/~mlopes/publications.html)
- [25] Majda A. J. et Bertozzi A.L., *Vorticity and Incompressible flow*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, 2002.
- [26] Marchioro C., *On the Euler equations with a singular external velocity field*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 84, 61-69, 1990.

- [27] Marchioro C. et Pulvirenti M., *On the vortex-wave system*, Mechanics, analysis, and geometry : 200 years after Lagrange, M. Francaviglia (ed), Elsevier Science, Amsterdam, 1991.
- [28] Marchioro C. et Pulvirenti M., *Mathematical Theory of Incompressible Nonviscous Fluids*, Springer-Verlag, 1991.
- [29] Marchioro C. et Pulvirenti M., *Vortices and Localization in Euler Flows*, Commun. Math. Phys. 154,49-61, 1993.
- [30] Monniaux S., *Navier-Stokes Equations in Arbitrary Domains : the Fujita-Kato Scheme*, Math. Res. Lett. 13 (2006), no. 3, 455-461.
- [31] Pommerenke C., *Univalent functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, 1975.
- [32] Pommerenke C., *Boundary behaviour of conformal maps*, BerlinNew York : Springer-Verlag, 1992.
- [33] Starovoitov V.N., *Uniqueness of a solution to the problem of evolution of a point vortex*, Siberian Mathematical Journal, Vol. 35, no. 3, 1994.
- [34] Temam R., *Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1979.
- [35] Yudovich V.I., *Non-stationary flows of an ideal incompressible fluid*, Zh Vych Mat, 3 :1032-1066, 1963.

## Résumé

Nous étudions dans cette thèse le comportement asymptotique des fluides incompressibles dans les domaines extérieurs, quand l'obstacle devient de plus en plus fin, tendant vers une courbe. Nous étendons les travaux d'Itimie, Lopes Filho, Nussenzweig Lopes et Kelliher dans lesquels les auteurs considèrent des obstacles se contractant vers un point. Nous travaillons tout d'abord en dimension deux. En utilisant des outils de l'analyse complexe, nous traitons le cas des fluides idéaux et visqueux à l'extérieur d'une courbe. Nous regardons ensuite en dimension trois les fluides visqueux à l'extérieur d'une surface. Nous finissons enfin par montrer l'unicité du problème mixte Euler point-vortex avec un seul point vortex introduit par Marchioro et Pulvirenti, dans le cas où le tourbillon initial est constant près du point vortex.

---

## Flow around thin obstacle

### Abstract

We study in this work the influence of a thin obstacle on the behavior of incompressible flow. We extend the works made by Itimie, Lopes Filho, Nussenzweig Lopes and Kelliher where they consider that the obstacle shrink to a point. We begin by working in two-dimension, and thanks to complex analysis we treat the case of ideal and viscous flow around a curve. Next, we study three-dimensional viscous flow in the exterior of a surface. We finish by giving uniqueness of the vortex-wave system with a single point vortex introduced by Marchioro and Pulvirenti, in the case where the initial vorticity is constant near the point vortex.

---

DISCIPLINE : Mathématiques

---

MOTS-CLES : fluides incompressibles, fluides sur les domaines extérieurs, incompressible flow, exterior flow

---

Université de Lyon. Université Lyon1 ;  
INSA de Lyon, F-69621 ; Ecole Centrale de Lyon ;  
CNRS, UMR 5208 Institut Camille Jordan.  
Bâtiment du Doyen Jean Braconnier  
43, blvd du 11 novembre 1918  
F - 69622 Villeurbanne Cedex